

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

M A T E M A T I C K Á O L Y M P I Á D A PRE ŽIAKOV ZÁKLADNÝCH ŠKÔL A NIŽŠÍCH ROČNÍKOV VIACROČNÝCH GYMNÁZIÍ

67. ročník, školský rok 2017/2018

Domáce kolo

Kategórie **Z5, Z6, Z7, Z8, Z9** – zadania úloh



Milí žiaci,

máte radi zaujímavé matematické úlohy a chceli by ste súťažiť v ich riešení? Ak áno, zúčastnite sa Matematickej olympiády (MO). Súťaž je dobrovoľná a nesúvisí s klasifikáciou z matematiky. Matematická olympiáda má niekoľko kategórií. V tomto letáku nájdete úlohy, ktoré sú určené žiakom základných škôl (ZŠ), prvých štyroch ročníkov osemročných gymnázií (OG) a príslušných ročníkov gymnázií s iným počtom rokov štúdia.

Kategória **Z5** je určená pre žiakov 5. ročníka ZŠ.

Kategória **Z6** je určená pre žiakov 6. ročníka ZŠ a I. ročníka OG.

Kategória **Z7** je určená pre žiakov 7. ročníka ZŠ a II. ročníka OG.

Kategória **Z8** je určená pre žiakov 8. ročníka ZŠ a III. ročníka OG.

Kategória **Z9** je určená pre žiakov 9. ročníka ZŠ a IV. ročníka OG. Túto kategóriu môžu riešiť aj žiaci prvého („prípravného“) ročníka bilingválnych gymnázií s päťročným štúdiom.

So súhlasom svojho učiteľa matematiky môžete súťažiť aj v niektorej kategórii určenej pre vyšší ročník alebo v kategóriách A, B, C, ktoré sú určené pre žiakov stredných škôl (úlohy sú zverejnené v letáku MO pre stredné školy).

Priebeh súťaže:

Kategórie Z5, Z6, Z7, Z8 pozostávajú z domáceho a okresného kola, kategória Z9 z domáceho, okresného a krajského kola.

V rámci domáceho kola riešite 6 úloh, ktoré sú v tomto letáku. *Riešenia úloh odovzdajte svojim učiteľom matematiky najneskôr v týchto termínoch:*

kategória	jedna trojica úloh	druhá trojica úloh
Z5, Z9	15. november 2017	11. december 2017
Z6, Z7, Z8	11. december 2017	28. február 2018

Vaši učitelia vám riešenia opravujú a ohodnotia podľa stupnice: 1 – *výborne*, 2 – *dobre*, 3 – *nevyhovuje*.

Úspešným riešiteľom domáceho kola sa stáva žiak, ktorý bude mať ohodnotené aspoň štyri úlohy stupňom aspoň *dobře*. Práce všetkých úspešných riešiteľov kategórií Z5 – Z9 zašle vaša škola okresnej komisii MO. Tá z nich vyberie najlepších riešiteľov a pozve ich do okresného kola. V rámci neho riešite úlohy podobného rázu ako v domácom kole, avšak klauzúrne, to znamená, že nemôžete využívať cudziu pomoc a na riešenie máte k dispozícii obmedzený čas (2 hodiny v kategóriách Z5, Z6, Z7, Z8, 4 hodiny v kategórii Z9). Najlepší riešitelia okresného kola kategórie Z9 budú pozvaní do krajského kola.

O poradí v okresných a krajských kolách rozhoduje súčet bodov získaných za jednotlivé úlohy. Napríklad ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak *X* a práve traja žiaci (vrátane *X*) dosiahnu rovnako veľa bodov ako *X*, tak žiakovi *X* patrí v poradí 6.–8. miesto, prípadne skrátené len 6. miesto. Analogickým postupom určujeme umiestnenie všetkých žiakov. Žiadne iné kritériá nie sú prípustné.

Termíny 67. ročníka Matematickej olympiády:

kategória	okresné kolo	krajské kolo
Z5	24. január 2018	—
Z6, Z7, Z8	17. apríl 2018	—
Z9	24. január 2018	27. marec 2018

Pokyny a rady súťažiacim:

Riešenie súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

Jozef Plachý, 7.C
 ZŠ Hodžova ul. 5, 949 01 Nitra
 Úloha Z7-I-2

Posledný údaj je označenie úlohy podľa tohto letáka. Riešenie píšete tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup, podrobne vysvetlite, ako ste uvažovali. Uvedomte si, že sa hodnotí nielen výsledok, ku ktorému ste došli, ale hlavne správnosť úvah, ktoré k nemu viedli. Práce, ktoré nebudú spĺňať tieto podmienky, alebo budú odovzdané po termíne, nebudú do súťaže prijaté.

Veľa radosti z úspešného riešenia úloh MO prajú

RNDr. Monika Dillingerová, PhD.
 SKMO, úlohová komisia pre kategórie Z

Mgr. Peter Novotný, PhD.
 predseda Slovenskej komisie MO

Archív zadaní a riešení úloh MO nájdete na internetových stránkach:

<http://www.olympiady.sk>

<http://skmo.sk>

KATEGÓRIA Z5

Z5 – I – 1

Janko dostal vreckové a chce si zaň kúpiť niečo dobré. Keby si kúpil štyri koláče, zvýšilo by mu 0,50 €. Keby si chcel kúpiť päť koláčov, chýbalo by mu 0,60 €. Keby si kúpil dva koláče a tri šišky, utratil by celé vreckové bezo zvyšku. Koľko stojí jedna šiška? *(Lenka Dedková)*

Z5 – I – 2

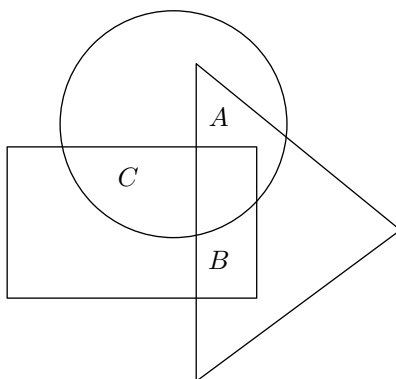
Jano mal tri kletky (čiernu, striebornú, zlatú) a tri zvieratá (morča, potkana a tchora). V každej kletke bolo jedno zviera. Zlatá kletka stála naľavo od čiernej kletky. Strieborná kletka stála napravo od kletky s morčatom. Potkan bol v kletke napravo od striebornej kletky. Určte, v ktorej kletke bolo ktoré zviera. *(Libuše Hozová)*

Z5 – I – 3

Na obrázku je diagram so siedmimi políčkami. Nakreslite do neho hviezdičky tak, aby boli splnené všetky nasledujúce podmienky:

- Hviezdičiek je celkom 21.
- V každom políčku je aspoň jedna hviezdička.
- V políčkach označených A , B , C je dokopy 8 hviezdičiek.
- V políčkach označených A a B je dokopy menej hviezdičiek ako v políčku označenom C .
- V políčku označenom B je viac hviezdičiek ako v políčku označenom A .
- V kruhu je celkom 15 hviezdičiek, v trojuholníku celkom 12 hviezdičiek a v obdĺžniku celkom 14 hviezdičiek.

(Eva Semerádová)



Z5 – I – 4

Eva s Marekom hrali bedminton a Viktor im počítal výmeny. Po každých 10 výmenách nakreslil Viktor krížik (X). Potom namiesto každých 10 krížikov nakreslil krúžok (O) a prislúchajúcich 10 krížikov zmazal. Keď Eva a Marek hru ukončili, mal Viktor nakreslené toto:

OOOXXXXXX

Určte, koľko najmenej a koľko najviac výmen Eva s Marekom mohli zohrať.

(Miroslava Farkas Smitková)

Z5 – I – 5

Zostrojte ľubovoľnú úsečku AS , potom zostrojte kružnicu k so stredom v bode S , ktorá prechádza bodom A .

1. Zostrojte na kružnici k body E, F, G tak, aby spolu s bodom A určovali obdĺžnik $AEFG$.
Nájdite aspoň dve riešenia.
2. Zostrojte na kružnici k body B, C, D tak, aby spolu s bodom A určovali štvorec $ABCD$.

(Lucie Růžičková)

Z5 – I – 6

Na stole ležalo osem kartičiek s číslami 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Fero si vybral tri kartičky. Sčítal na nich napísané čísla a zistil, že ich súčet je o 1 väčší ako súčet čísel na zvyšných kartičkách. Ktoré kartičky mohli zostať na stole? Určte všetky možnosti.

(Libuše Hozová)

KATEGÓRIA Z6

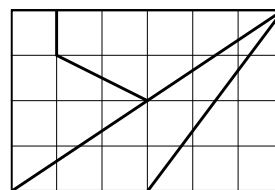
Z6 – I – 1

Anička a Blanka si napísali každá jedno dvojciferné číslo, ktoré začínalo sedmičkou. Dievčatá si zvolili rôzne čísla. Potom každá medzi obe cifry vložila nulu, takže im vzniklo trojciferné číslo. Od neho každá odčítala svoje pôvodné dvojciferné číslo. Výsledok ich prekvapil. Určte, ako sa ich výsledky líšili.

(Libuše Hozová)

Z6 – I – 2

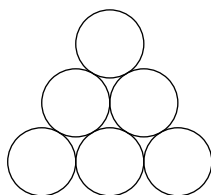
Erika chcela ponúknuť čokoládu svojim trom kamarátkam. Keď ju vytiahla z batohu, zistila, že je polámaná ako na obrázku. (Vyznačené štvorčeky sú navzájom zhodné.) Dievčatá sa dohodli, že čokoládu ďalej lámať nebudú a lósom určia, aký veľký kúsok ktorá dostane. Zoraďte štyri kúsky čokolády od najmenšieho po najväčší.



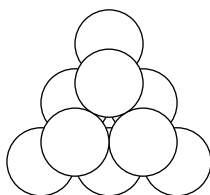
(Katarína Jasenčáková)

Z6 – I – 3

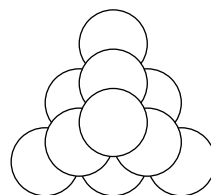
Jano mal 100 rovnakých zaváracích fliaš, z ktorých si staval trojboké pyramídy. Najvyššie poschodie pyramídy má vždy jednu fľašu, druhé poschodie zhora predstavuje rovnostranný trojuholník, ktorého strana pozostáva z dvoch fliaš, atď. Príklad konštrukcie trojposchodovej pyramídy je na obrázku.



1. poschodie



1. a 2. poschodie



trojposchodová pyramída

1. Koľko fliaš Jano potreboval na päťposchodovú pyramídu?
2. Koľko poschodí mala pyramída, na ktorú bolo použitých čo najviac Janových fliaš?

(Katarína Jasenčáková)

Z6 – I – 4

Veronika má klasickú šachovnicu s 8×8 políčkami. Riadky sú označené ciframi 1 až 8, stĺpce písmenami A až H. Veronika položila na políčko B1 jazdca, s ktorým možno pohybovať iba tak ako v šachu.

1. Je možné premiestniť jazdca štyrmi ťahmi na políčko H1?
2. Je možné premiestniť jazdca piatimi ťahmi na políčko E6?

Ak áno, popíšte všetky možné postupnosti ťahov. Ak nie, zdôvodnite, prečo to možné nie je.

(Katarína Jasenčáková)

Z6 – I – 5

V plechovke boli červené a zelené cukríky. Cyril zjedol $\frac{2}{5}$ všetkých červených cukríkov a Zuzka zjedla $\frac{3}{5}$ všetkých zelených cukríkov. Teraz tvoria červené cukríky $\frac{3}{8}$ všetkých cukríkov v plechovke. Koľko najmenej cukríkov mohlo byť pôvodne v plechovke? (Lucie Růžičková)

Z6 – I – 6

Zostrojte ľubovoľnú úsečku DS , potom zostrojte kružnicu k so stredom v bode S , ktorá prechádza bodom D .

1. Zostrojte rovnostranný trojuholník DAS , ktorého vrchol A leží na kružnici k .
2. Zostrojte rovnostranný trojuholník ABC , ktorého vrcholy B a C tiež ležia na kružnici k .

(Lucie Růžičková)



MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

67. ročník Školský rok 2017 / 2018 Domáce kolo

KATEGÓRIA Z7

Z7 – I – 1

Peter povedal Pavlovi: „Napíš dvojciferné prirodzené číslo, ktoré má tú vlastnosť, že keď od neho odčítaš dvojciferné prirodzené číslo s tými istými ciframi napísanými v opačnom poradí, dostaneš rozdiel 63.“ Ktoré číslo mohol Pavol napísať? Určte všetky možnosti.

(Libuše Hozová)

Z7 – I – 2

Dané sú dve dvojice rovnobežných priamok $AB \parallel CD$ a $AC \parallel BD$. Bod E leží na priamke BD , bod F je stredom úsečky BD , bod G je stredom úsečky CD a obsah trojuholníka ACE je 20 cm^2 . Určte obsah trojuholníka DFG .

(Vladimíra Semeráková)

Z7 – I – 3

Zoologická záhrada ponúkala školským skupinám výhodné vstupné: každý piaty žiak dostáva vstupenku zdarma. Pán učiteľ 6.A spočítal, že ak kúpi vstupné deťom zo svojej triedy, ušetrí za štyri vstupenky a zaplatí 19,95 €. Pani učiteľka 6.B mu navrhla, nech kúpi vstupenky deťom oboch tried naraz, a tak budú platiť 44,10 €. Koľko detí z 6.A a koľko detí z 6.B išlo do zoo? (Cena vstupenky v centoch je celočíselná.)

(Libor Šimůnek)

Z7 – I – 4

Na stole ležalo šesť kartičiek s ciframi 1, 2, 3, 4, 5, 6. Anežka z týchto kartičiek zložila šesťciferné číslo, ktoré bolo deliteľné šiestimi. Potom postupne odoberala kartičky sprava. Keď odobrala prvú kartičku, zostalo na stole päťciferné číslo deliteľné piatimi. Keď odobrala ďalšiu kartičku, zostalo štvorciferné číslo deliteľné štyrmi. Keď odoberala ďalej, získala postupne trojciferné číslo deliteľné tromi a dvojciferné číslo deliteľné dvoma. Ktoré šesťciferné číslo mohla Anežka pôvodne zložiť? Určte všetky možnosti.

(Lucie Růžičková)

Z7 – I – 5

Prokop zostrojil trojuholník ABC , ktorého vnútorný uhol pri vrchole A bol väčší ako 60° a vnútorný uhol pri vrchole B bol menší ako 60° . Juraj narysoval v polovine určenej priamkou AB a bodom C bod D , a to tak, že trojuholník ABD bol rovnostranný. Potom chlapci zistili, že trojuholníky ACD a BCD sú rovnoramenné s hlavným vrcholom D . Určte veľkosť uhla ACB .

(Eva Semeráková)

Z7 – I – 6

Vodník Chaluha nalieval hmlu do rozmanitých, rôzne veľkých nádob, ktoré si starostlivo zoradil na polici. Pri nalievaní postupoval postupne z jednej strany, žiadnu nádobu nepreskakoval. Do každej nádoby sa vojde aspoň deciliter hmly. Keby nalieval hmlu sedemlitrovou odmerkou, hmla z prvej odmerky by naplnila presne 11 nádob, hmla z druhej odmerky by naplnila presne ďalších 12 nádob a hmla z tretej odmerky by naplnila presne 7 nádob. Ak by použil päťlitrovú odmerku, tak hmla z prvej odmerky by naplnila presne 8 nádob, z druhej presne 10 nádob, z tretej presne 7 nádob a zo štvrtej odmerky presne 4 nádoby. Rozhodnite, či je tridsiata nádoba v poradí väčšia ako dvadsať piata.

(Karel Pazourek)

KATEGÓRIA Z8

Z8 – I – 1

Vyjadrite číslo milión pomocou čísel obsahujúcich iba cifry 9 a algebrických operácií plus, mínus, krát, delenie, mocnina a odmocnina. Určte aspoň tri rôzne riešenia. (Lenka Dedková)

Z8 – I – 2

V ostrouhlom trojuholníku KLM má uhol KLM veľkosť 68° . Bod V je priesečníkom výšok a P je pätou výšky na stranu LM . Os uhla PVM je rovnobežná so stranou KM . Porovnajzte veľkosti uhlov MKL a LMK . (Libuše Hozová)

Z8 – I – 3

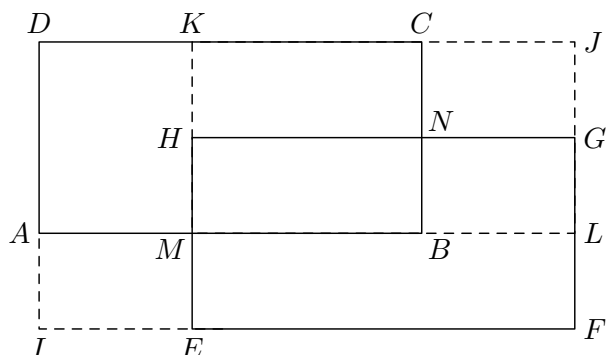
Adelka mala na papieri napísané dve čísla. Keď k nim pripísala ešte ich najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok, dostala štyri rôzne čísla menšie ako 100. S úžasom zistila, že keď vydelí najväčšie z týchto štyroch čísel najmenším, dostane najväčší spoločný deliteľ všetkých štyroch čísel. Ktoré čísla mala Adelka napísané na papieri? (Michaela Petrová)

Z8 – I – 4

Roboti Róbert a Hubert skladajú a rozoberajú mlynčeky na kávu. Pritom každý z nich mlynček zloží štyrikrát rýchlejšie, ako ho ten druhý rozoberie. Keď ráno prišli do dielne, niekoľko mlynčekov už tam bolo zložených. O 9:00 začal Hubert skladať a Róbert rozoberať, presne o 12:00 Hubert dokončil skladanie mlynčeka a Róbert rozoberanie iného. Spolu za túto zmenu pribudlo 27 mlynčekov. O 13:00 začal Róbert skladať a Hubert rozoberať, presne o 19:00 dokončil Róbert skladanie posledného mlynčeka a Hubert rozoberanie iného. Spolu za túto zmenu pribudlo 120 mlynčekov. Za ako dlho zloží mlynček Hubert? Za ako dlho ho zloží Róbert? (Karel Pazourek)

Z8 – I – 5

Zhodné obdĺžniky $ABCD$ a $EFGH$ sú umiestnené tak, že ich zhodné strany sú rovnobežné. Body I, J, K, L, M a N sú priesečníky predĺžených strán ako na obrázku. Obsah obdĺžnika $BNHM$ je 12 cm^2 , obsah obdĺžnika $MBCK$ je 63 cm^2 a obsah obdĺžnika $MLGH$ je 28 cm^2 . Určte obsah obdĺžnika $IFJD$. (Eva Semerádová)



Z8 – I – 6

Priamka predstavuje číselnú os a vyznačené body zodpovedajú číslam $a, -a, a + 1$, avšak nie nutne v tomto poradí. Zostrojte body, ktoré zodpovedajú číslam 0 a 1. Preberte všetky možnosti. (Michaela Petrová)



Na ukážku uvádzame *uzorové riešenie* jednej úlohy zo staršej olympiády:

Úloha Z8 – II – 1.

Daný je obdĺžnik s celočíselnými dĺžkami strán. Ak zväčšíme jednu jeho stranu o 4 a druhú zmenšíme o 5, dostaneme obdĺžnik s dvojnásobným obsahom. Určte strany daného obdĺžnika. Nájdite všetky možnosti.

Riešenie. Dĺžky strán obdĺžnika označíme a , b . Nový obdĺžnik má dĺžky strán $a + 4$, $b - 5$. Podľa podmienky úlohy pre obsahy oboch obdĺžnikov platí

$$2ab = (a + 4)(b - 5).$$

Postupne upravíme

$$\begin{aligned} ab - 4b + 5a &= -20, \\ ab - 4b + 5a - 20 &= -40. \end{aligned}$$

Odčítali sme 20, aby sme mohli ľavú stranu upraviť na súčin

$$(a - 4)(b + 5) = -40.$$

Riešenie nájdeme rozkladom čísla -40 na dva činitele. Pritom musí byť $a > 0$, $b > 0$, a teda $a - 4 > -4$, $b + 5 > 5$.

Sú dve také možnosti: $(-2) \cdot 20 = -40$ a $(-1) \cdot 40 = -40$.

V prvom prípade dostaneme obdĺžnik so stranami $a = 2$, $b = 15$ s obsahom $S = 30$. Nový obdĺžnik má potom strany $a' = 6$, $b' = 10$ a obsah $S' = 60$, t. j. $S' = 2S$.

V druhom prípade dostaneme obdĺžnik so stranami $a = 3$, $b = 35$ s obsahom $S = 105$. Nový obdĺžnik má potom strany $a' = 7$, $b' = 30$ a obsah $S' = 210 = 2S$.

Úloha má teda dve riešenia. Daný obdĺžnik môže mať strany buď 2 a 15 alebo 3 a 35.

Na záver jedna rada:

Úlohy nie sú ľahké. Nenechajte sa odradiť, keď neobjavíte hneď riešenie. Experimentujte, kreslite si, „hrajte sa“ s úlohou. Niekedy pomôže pozrieť sa do nejakej knižky, kde nájdete podobné úlohy vyriešené, inokedy sa môže stať, že zrazu o tri dni „z ničoho nič“ na riešenie prídete.

Matematickú olympiádu vyhlasuje Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu SR spolu s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov (JSMF). Súťaž riadi Slovenská komisia MO (SKMO), v jednotlivých krajoch a okresoch krajské a okresné komisie MO. Na jednotlivých školách súťaž zaisťujú učitelia matematiky. Vy sa vždy obracajte na svojho učiteľa matematiky.

Napokon by sme Vás radi upozornili na rôzne korešpondenčné semináre určené pre ZŠ a OG. Tieto súťaže sú nielen dobrou formou prípravy na MO, ale všeobecne pomôžu v zdokonaľovaní matematického myslenia. K tomu prispievajú aj veľmi populárne záverečné sústredenia pre najlepších riešiteľov. SKMO Vám odporúča napr. seminár SEZAM organizovaný pod hlavičkou JSMF Žilina, na tvorbe zadání tohto seminára sa priamo podieľajú aj niekoľkí členovia Úlohovej komisie MO. Viacerí členovia SKMO zasa spolupracujú v združení STROM (so sídlom na UPJŠ Košice) pri organizovaní seminárov MATIK a MALYNÁR. Zapojiť sa môžete tiež do seminárov PIKOMAT (organizuje ho P-MAT, n.o.) či RIEŠKY (usporadúva ho Gymn. Grösslingová v Bratislave). Podrobné informácie získate na internetových stránkach sezam.sk, strom.sk, www.pikomat.sk a riesky.sk.

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

67. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Leták kategórií Z5, Z6, Z7, Z8, Z9 – domáce kolo

- Autori úloh: Bc. Alžbeta Bohiníková, Mgr. Lenka Dedková, PaedDr. Libuše Hozová, RNDr. Monika Dillingerová, PhD., Mgr. Veronika Hucíková, Bc. Katarína Jasenčáková, Mgr. Erika Novotná, PhD., Mgr. Marie Krejčová, Martin Mach, Mgr. Karel Pazourek, Mgr. Michaela Petrová, Mgr. Lucie Růžičková, PhD. Eva Semerádová, Mgr. Vladimíra Semeráková, doc. Mgr. Miroslava Farkas Smitková, PhD. MUDr. Libor Šimůnek doc. PhD. Marta Volfová, CSc., Mgr. Vojtěch Žádník, PhD.
- Recenzenti: Bc. Alžbeta Bohiníková, PaedDr. Svetlana Bednářová, PhD., RNDr. Monika Dillingerová, PhD., Mgr. Veronika Hucíková, Bc. Katarína Jasenčáková, Mgr. Erika Novotná, PhD., Mgr. Peter Novotný, PhD., doc. Mgr. Miroslava Farkas Smitková, PhD.
- Redakčná úprava: doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., Mgr. Peter Novotný, PhD.
- Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017