

2017/2018
67. ročník MO

Zadania úloh krajského kola kategórie A

(Súťaž sa konala v utorok 16. januára 2018.)

1. Pavol striedavo vpisuje krížiky a krúžky do políčok tabuľky (začína krížikom). Keď je tabuľka celá vyplnená, výsledné skóre spočíta ako rozdiel $X - O$, pričom X je súčet druhých mocnín počtov krížikov v jednotlivých riadkoch a stĺpcoch a O je súčet druhých mocnín počtov krúžkov v jednotlivých riadkoch a stĺpcoch. Určte všetky možné hodnoty skóre dosiahnuteľné pre tabuľku 67×67 . (Josef Tkadlec)

2. Daná je polkružnica k nad priemerom PQ . Na nej je zostrojená tetiva BC pevnej dĺžky d , ktorej krajné body sú rôzne od bodov P, Q . Lúč vyslaný z bodu B sa od priemeru PQ odrazí do bodu C v takom bode A , že $|\angle PAB| = |\angle QAC|$. Dokážte, že veľkosť uhla BAC nezávisí od polohy tetivy BC na polkružnici. (Šárka Gergelitsová)

3. Sú dané dve rôzne kladné reálne čísla a, b . Uvažujme rovnicu

$$\lfloor ax + b \rfloor = \lfloor bx + a \rfloor,$$

pričom $\lfloor y \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré neprevyšuje y . Dokážte, že existuje interval dĺžky aspoň

$$\frac{1}{\max\{a, b\}},$$

ktorého všetky body sú riešeniami danej rovnice. (Patrik Bak)

4. Rozhodnite, či existujú kladné celé čísla n a k také, že

$$\frac{n}{11^k - n}$$

je druhou mocninou celého čísla. (Ján Mazák)