67. ročník Matematickej olympiády
2017/2018 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z9*

---

1. *Vekový priemer všetkých ľudí, ktorí sa zišli na rodinnej oslave, bol rovný počtu prítomných. Teta Beta, ktorá mala 29 rokov, sa vzápätí ospravedlnila a odišla. Aj po odchode tety Bety bol vekový priemer všetkých prítomných ľudí rovný ich počtu. Koľko ľudí bolo pôvodne na oslave?* (*Libuše Hozová*)

Nápad. Aký je vzťah medzi počtom prítomných a súčtom ich vekov?

Riešenie. Vekový priemer všetkých ľudí, ktorí sa zišli na oslave, je rovný podielu súčtu vekov všetkých prítomných (ozn. s) a ich počtu (ozn. n). Podľa zadania platí

$$\frac{s}{n} = n, \quad \text{čiže} \quad s = n^2.$$

Po odchode tety Bety sa počet prítomných zmenšil o 1 a súčet ich vekov o 29. Podľa zadania platí

$$\frac{s-29}{n-1} = n-1, \quad \text{čiže} \quad s-29 = (n-1)^2.$$

Keď do poslednej rovnice dosadíme $s = n^2$, roznásobíme pravú stranu a ďalej upravíme, dostaneme

$$\begin{aligned} n^2 - 29 &= n^2 - 2n + 1, \\ 2n &= 30, \\ n &= 15. \end{aligned}$$

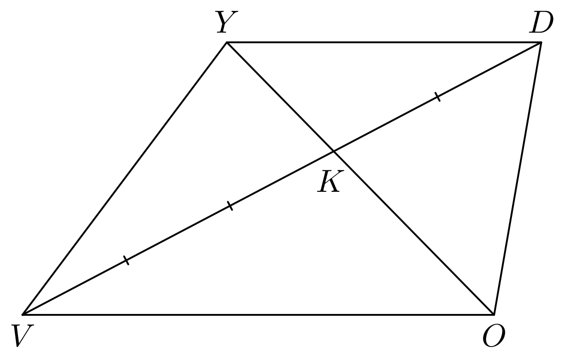
Na rodinnú oslavu sa pôvodne dostavilo 15 ľudí.

---

2. *V lichobežníku $VODY$ platí, že VO je dlhšou základňou, priesečník uhlopriečok K delí úsečku VD v pomere $3:2$ a obsah trojuholníka KOV je rovný 13,5 cm^2. Určte obsah celého lichobežníka.* (*Michaela Petrová*)

Nápad. Čo viete povedať o ďalších trojuholníkoch obsiahnutých v lichobežníku?

Riešenie. Keďže VO je dlhšou základňou lichobežníka $VODY$, bod K na uhlopriečke VD je bližšie k vrcholu D.



Trojuholníky KOV a KDO majú spoločnú výšku z vrcholu O a dĺžky strán VK a KD prislúchajúcich k tejto výške sú v pomere $3:2$. Preto aj obsahy týchto trojuholníkov sú v rovnakom pomere, teda

$$S_{KDO} = \frac{2}{3} S_{KOV}.$$

Trojuholníky VOD a VOY majú spoločnú stranu VO a rovnakú výšku na túto stranu, preto majú rovnaké obsahy. Trojuholník KOV je časťou oboch týchto trojuholníkov, preto majú rovnaké obsahy aj trojuholníky KDO a KYV,

$$S_{KYV} = S_{KDO} = \frac{2}{3} S_{KOV}.$$

Trojuholníky KYV a KDY majú spoločnú výšku z vrcholu Y a zodpovedajúce strany VK a KD sú v pomere $3 : 2$. Preto aj obsahy týchto trojuholníkov sú v rovnakom pomere,

$$S_{KDY} = \frac{2}{3} S_{KYV} = \frac{4}{9} S_{KOV}.$$

Obsah celého lichobežníka je súčtom obsahov uvedených štyroch trojuholníkov, teda

$$\begin{aligned} S_{VODY} &= S_{KOV} + S_{KDO} + S_{KYV} + S_{KDY} = \\ &= \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right) S_{KOV} = \frac{25}{9} \cdot 13{,}5 = 37{,}5\,(\mathrm{cm}^2). \end{aligned}$$

Poznámka. Pri postupnom vyčísľovaní obsahov vyššie menovaných trojuholníkov dostávame

$$S_{KDO} = S_{KYV} = 9\,\mathrm{cm}^2, \quad S_{KDY} = 6\,\mathrm{cm}^2.$$

Rovnosť $S_{KYV} = \frac{2}{3} S_{KOV}$, resp. $S_{KDY} = \frac{4}{9} S_{KOV}$ možno zdôvodniť priamo pomocou podobnosti trojuholníkov KOV a KYD (koeficient podobnosti je $3 : 2$).

---

3. *Roboti Róbert a Hubert skladajú a rozoberajú mlynčeky na kávu. Pritom každý z nich mlynček zloží štyrikrát rýchlejšie, ako ho sám rozoberie. Keď ráno prišli do dielne, niekoľko mlynčekov už tam bolo zložených. O 7:00 začal Hubert skladať a Róbert rozoberať, presne o 12:00 Hubert dokončil skladanie mlynčeka a Róbert rozoberanie iného. Celkom za túto zmenu pribudlo 70 mlynčekov. O 13:00 začal Róbert skladať a Hubert rozoberať, presne o 22:00 dokončil Róbert skladanie posledného mlynčeka a Hubert rozoberanie iného. Celkom za túto zmenu pribudlo 36 mlynčekov. Za ako dlho by zložili 360 mlynčekov, keby Róbert aj Hubert skladali spoločne?* (Karel Pazourek)

Nápad. Koľko mlynčekov pribudne za hodinu v každej zo zmien?

Riešenie. V dopoludňajšej päťhodinovej zmene pribudlo 70 mlynčekov, čo zodpovedá $70 : 5 = 14$ mlynčekom za hodinu. V odpoludňajšej deväťhodinovej zmene pribudlo 36 mlynčekov, čo zodpovedá $36 : 9 = 4$ mlynčekom za hodinu. Ak by roboti pracovali jednu hodinu dopoludňajším spôsobom a jednu hodinu odpoludňajším spôsobom, vyrobili by $14 + 4 = 18$ mlynčekov a pritom by vyrobili rovnaké množstvo mlynčekov, ako keby spolu skladali (a nič nerozoberali) $\frac{3}{4}$ hodiny. Roboti by spolu zložili 360 mlynčekov za $\frac{3}{4} \cdot 20 = 15$ hodín, lebo $360 = 18 \cdot 20$.

Iné riešenie. Ak h označuje počet mlynčekov, ktoré zloží Hubert za hodinu, a r počet mlynčekov, ktoré za hodinu zloží Róbert, tak za hodinu rozloží Hubert $\frac{1}{4}h$ mlynčekov a Róbert $\frac{1}{4}r$ mlynčekov. Informácie zo zadania vedú na sústavu dvoch rovníc

$$\begin{aligned} 5\left(h - \frac{1}{4}r\right) &= 70, \\ 9\left(r - \frac{1}{4}h\right) &= 36. \end{aligned}$$

Riešením tejto sústavy dostaneme $r = 8$ a $h = 16$. Za hodinu by tak obaja roboti spolu zložili $r + h = 24$ mlynčekov. Teda 360 mlynčekov by spolu skladali $360 : 24 = 15$ hodín.

---

4. *Čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 sa chystali na cestu vlakom s tromi vagónmi. Chceli sa rozsadiť tak, aby v každom vagóne sedeli tri čísla a najväčšie z každej trojice bolo rovné súčtu zvyšných dvoch. Sprievodca tvrdil, že to nie je problém, a snažil sa číslam pomôcť. Naopak výpravca tvrdil, že to nie je možné. Rozhodnite, kto z nich mal pravdu.*

(*Erika Novotná*)

Nápad. Uvažujte paritu (párnosť, nepárnosť) čísel a ich súčtov.

Riešenie. Ak by sa čísla dali rozsadiť do vagónov podľa ich želaní, tak by súčet troch najväčších čísel z každého vagóna bol rovnaký ako súčet zvyšných šiestich čísel. To by znamenalo, že súčet všetkých deviatich čísel by bol párny. Avšak tento súčet je

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45,$$

čo je nepárne číslo. Preto čísla požadovaným spôsobom rozsadiť nemožno, pravdu mal výpravca.

Iné riešenie. Medzi číslami 1 až 9 je päť nepárnych (N) a štyri párne (P). Párne číslo možno vyjadriť ako súčet dvoch nepárnych čísel alebo ako súčet dvoch párnych čísel. Nepárne číslo možno vyjadriť jedine ako súčet nepárneho a párneho čísla. V každom vagóne teda môžu podľa uvedených požiadaviek sedieť iba nasledujúce skupiny čísel:

$$\text{buď } \{N, N, P\}, \text{ alebo } \{P, P, P\}.$$

Akýmkoľvek priradením týchto možností do troch vagónov dostaneme vždy spolu párny počet nepárnych čísel a nepárny počet párnych čísel. V našom prípade je to však naopak, preto sa čísla nedajú rozsadiť podľa ich želaní. Pravdu mal teda výpravca.

Poznámka. Pri akomkoľvek rozmiestnení piatich nepárnych čísel do troch vagónov bude vždy v niektorom vagóne práve jedno alebo práve tri nepárne čísla. A v takom vagóne určite nebude platiť požiadavka o súčte.

Iný nápad. Ktoré čísla mohli cestovať s číslom 9?

Iné riešenie. Môžeme postupne po vagónoch rozsadzovať čísla od najväčšieho tak, aby platila požiadavka o ich súčte. Číslo 9 môže cestovať s niektorou z nasledujúcich dvojíc:

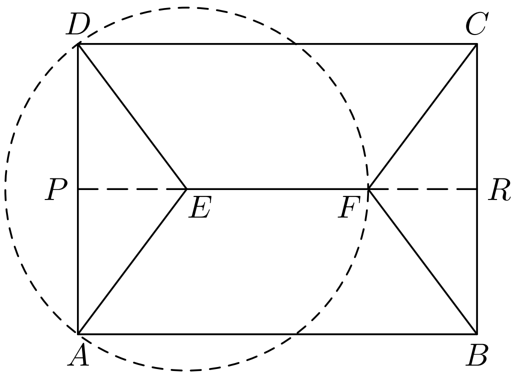
- 8 a 1: v ďalšom vagóne môže 7 cestovať s niektorou z nasledujúcich dvojíc:
  - ▷ 5 a 2: na ďalší vagón ostáva 6, 4 a 3, ale $6 \neq 4 + 3$,
  - ▷ 4 a 3: na ďalší vagón ostáva 6, 5 a 2, ale $6 \neq 5 + 2$,
- 7 a 2: v ďalšom vagóne môže 8 cestovať jedine s dvojicou
  - ▷ 5 a 3: na ďalší vagón ostáva 6, 4 a 1, ale $6 \neq 4 + 1$,
- 6 a 3: v ďalšom vagóne môže 8 cestovať jedine s dvojicou
  - ▷ 7 a 1: na ďalší vagón ostáva 5, 4 a 2, ale $5 \neq 4 + 2$,
- 5 a 4: v ďalšom vagóne môže 8 cestovať s niektorou z nasledujúcich dvojíc:
  - ▷ 7 a 1: na ďalší vagón ostáva 6, 3 a 2, ale $6 \neq 3 + 2$,
  - ▷ 6 a 2: na ďalší vagón ostáva 7, 3 a 1, ale $7 \neq 3 + 1$.

Zistili sme, že čísla sa nedajú rozsadiť tak, aby požiadavka o súčte platila vo všetkých vagónoch. Pravdu mal teda výpravca.

5. *Vnútri obdĺžnika $ABCD$ ležia body E a F tak, že úsečky EA, ED, EF, FB, FC sú navzájom zhodné. Strana AB je dlhá 22 cm a kružnica opísaná trojuholníku AFD má polomer 10 cm. Určte dĺžku strany BC.* (Lucie Růžičková)

Nápad. Kde leží stred kružnice opísanej trojuholníku AFD?

Riešenie. Bod E je rovnako ďaleko od bodov A a D, bod F je rovnako ďaleko od bodov B a C a úsečky AD a BC sú protiľahlými stranami obdĺžnika. Preto body E a F ležia na spoločnej osi úsečiek AD a BC. Bod E má rovnakú vzdialenosť od všetkých vrcholov trojuholníka AFD, preto je stredom jemu opísanej kružnice. Znázornenie bodov zo zadania vyzerá nasledovne (body P a R sú priesečníky osi EF so stranami AD a BC, t. j. stredy týchto strán):



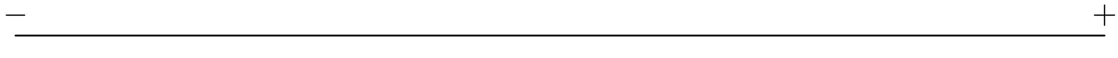
Trojuholníky APE, DPE, BRF a CRF sú navzájom zhodné pravouhlé trojuholníky, ktorých jedna odvesna je polovicou hľadanej strany obdĺžnika a veľkosti zvyšných dvoch strán vieme odvodiť zo zadania. Napr. v trojuholníku APE má prepona AE veľkosť 10 cm a odvesna PE má veľkosť $(22 - 10) : 2 = 6$ cm. Podľa Pytagorovej vety platí

$$|PA|^2 + 6^2 = 10^2,$$

teda $|PA|^2 = 64$ a $|PA| = 8$ cm. Dĺžka strany BC je 16 cm.

Poznámka. Na uvedenom obrázku mlčky naznačujeme, že strana AB je dlhšia ako BC. To je síce potvrdené nasledujúcim výpočtom, ale možno si to všimnúť priamo: Prepona AE v pravouhlom trojuholníku APE je dlhšia ako odvesna PA, čo je polovica strany BC. Ak by strana BC bola dlhšia ako strana AB, bola by úsečka AE tiež dlhšia ako polovica strany AB. Z predchádzajúceho však vieme, že $|AE| = 10$ cm a $\frac{1}{2}|AB| = 11$ cm, takže táto situácia nastať nemôže.

6. *Na priamke predstavujúcej číselnú os uvážte navzájom rôzne body zodpovedajúce číslam a, $2a$, $3a+1$ vo všetkých možných poradiach. Pri každej možnosti rozhodnite, či je také usporiadanie možné. Ak áno, uveďte konkrétny príklad, ak nie, zdôvodnite prečo.* (Michaela Petrová)



Nápad. Čo môžete povedať o usporiadaní trojice čísel a, $2a$, $3a$?

Riešenie. Pred samotným rozborom možností si všimnime niekoľko užitočných faktov. Keďže čísla majú byť navzájom rôzne, musí byť $a \neq 0$. Vzdialenosti medzi susednými číslami vo štvorici 0, a, $2a$, $3a$ sú rovnaké, a to $|a|$, pritom usporiadanie tejto štvorice závisí na znamienku a: číslo a je kladné práve vtedy, keď platí

$$0 < a < 2a < 3a, \tag{1}$$

číslo a je záporné práve vtedy, keď platí

$$3a < 2a < a < 0. \tag{2}$$

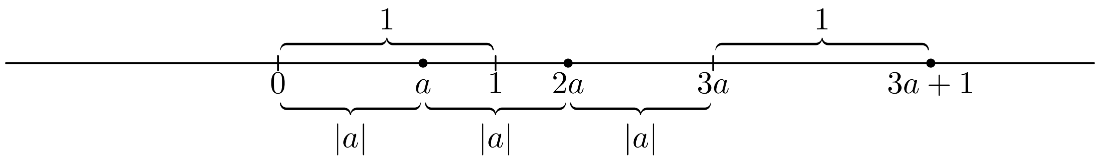
Bez ohľadu na znamienko a ďalej platí

$$3a < 3a + 1. \tag{3}$$

Všetky možné usporiadania troch navzájom rôznych čísel sú tieto:

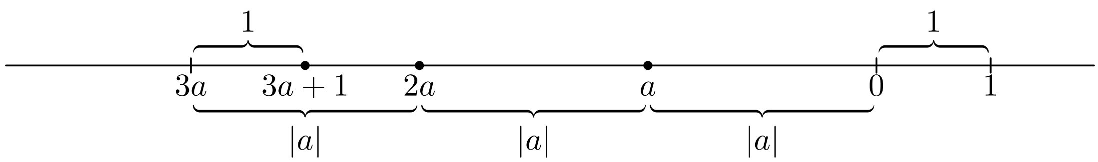
a) $a < 2a < 3a + 1$,
b) $a < 3a + 1 < 2a$,
c) $3a + 1 < a < 2a$,
d) $3a + 1 < 2a < a$,
e) $2a < 3a + 1 < a$,
f) $2a < a < 3a + 1$.

Pre kladné a podľa podmienok (1) a (3) platí $a < 2a < 3a + 1$, čo zodpovedá možnosti a) a súčasne vylučuje možnosti b) a c). Všeobecný vzťah medzi trojicou čísel vyhovujúcej možnosti a) a jej ukotvením na číselnej osi (t. j. číslami 0 a 1) je schematicky znázornený na nasledujúcom obrázku. Konkrétny príklad usporiadania a) je daný dosadením napr. $a = \frac{2}{3}$, teda $\frac{2}{3} < \frac{4}{3} < 3$.

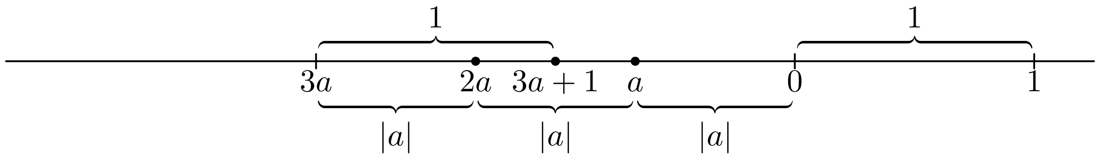


Pre záporné a nemôžeme z podmienok (2) a (3) o vzťahu $3a+1$ vzhľadom k a a $2a$ povedať nič bližšie. Postupne ukážeme, že každý zo zvyšných prípadov je možný:

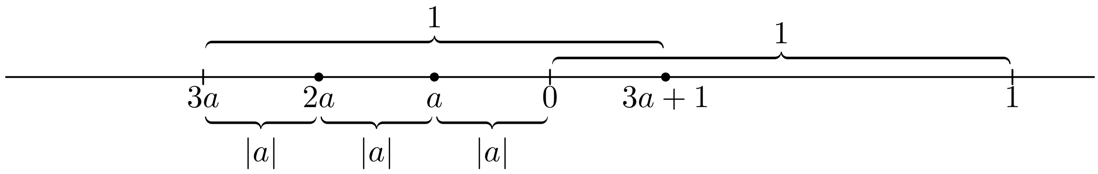
Všeobecné vzťahy medzi trojicami čísel vyhovujúcich možnostiam d), e), resp. f) a číslami 0 a 1 sú schematicky znázornené na nasledujúcich obrázkoch. Konkrétny príklad usporiadania d) je daný dosadením napr. $a = -2$, teda $-5 < -4 < -2$.



Konkrétny príklad usporiadania e) je daný dosadením napr. $a = -\frac{2}{3}$, teda $-\frac{4}{3} < -1 <$ $< -\frac{2}{3}$.



Konkrétny príklad usporiadania f) je daný dosadením napr. $a = -\frac{1}{4}$, teda $-\frac{1}{8} < -\frac{1}{4} <$ $< \frac{1}{4}$.



Poznámka. V prípadoch e) a f) môžeme voliť trojice bodov predstavujúcich čísla a, $2a$ a $3a+1$ úplne ľubovoľne; naznačeným spôsobom odvodíme umiestnenie 0 a 1, a tým vlastne určíme hodnotu a. V prípadoch a) a d) to tak nie je; napr. pre usporiadanie d) a bod $3a+1$ zvolený príliš vľavo od bodu $2a$ sa môže stať, že $3a$ vyjde niekde medzi, čo by bolo v rozpore s podmienkou (3).

Iný nápad. Pre jednotlivé usporiadania odvoďte možné hodnoty a.

Iné riešenie. Všetky možné usporiadania troch navzájom rôznych čísel sú uvedené v zozname a) až f) v predchádzajúcom riešení. Riešením nerovností v jednotlivých prípadoch zisťujeme, že prípad

a) je splnený pre ľubovoľné $a > 0$,
b) nie je splnený pre žiadne a,
c) nie je splnený pre žiadne a,
d) je splnený pre ľubovoľné $a < -1$,
e) je splnený pre ľubovoľné $-1 < a < -\frac{1}{2}$,
f) je splnený pre ľubovoľné $-\frac{1}{2} < a < 0$.

Pre ilustráciu uvádzame podrobnosti k prípadu b): zodpovedajúce nerovnosti sú splnené práve vtedy, keď platí

$$a < 3a + 1 \quad \text{a} \quad 3a + 1 < 2a,$$

čo je ekvivalentné s dvojicou nerovností

$$-\frac{1}{2} < a \quad \text{a} \quad a < -1.$$

Tieto dve podmienky súčasne nespĺňa žiadne reálne číslo, preto prípad b) nastať nemôže.

Diskusia v ostatných prípadoch je obdobná. Vo všetkých prípadoch, ktoré majú riešenie, stačí pre konkrétnu odpoveď zvoliť ľubovoľné a z určeného intervalu.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Libuše Hozová, Marie Krejčová, Martin Mach, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Farkas Smitková, Libor Šimůnek, Erika Trojáková, Marta Volfová, Vojtěch Žádník
Recenzenti:	Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Farkas Smitková, Erika Trojáková , Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný, Vojtech Bálint
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017