2003/2004
53. ročník MO *Riešenia úloh krajského kola kategórie A*

---

1. *Určte počet všetkých päťmiestnych palindrómov, ktoré sú deliteľné číslom* 37. *(Palindrómom nazývame číslo, ktorého zápis v desiatkovej sústave sa číta rovnako spredu aj zozadu.)* (J. Šimša)

Riešenie. Každý päťmiestny palindróm p sa dá zapísať v tvare $p = \overline{abcba}$, kde a, b, c sú číslice v desiatkovej sústave, $a \neq 0$. Z vyjadrenia

$$p = 10\,001a + 1\,010b + 100c = 37(270a + 27b + 3c) + 11(a + b - c)$$

vyplýva, že p je deliteľné číslom 37 práve vtedy, keď je číslom 37 deliteľné číslo $a+b-c$. Vzhľadom na to, že a, b, c sú číslice ($a \neq 0$), platí $-8 \leqq a + b - c \leqq 18$. Preto je číslo $a + b - c$ deliteľné 37 práve vtedy, keď $a + b - c = 0$, čiže $c = a + b$. Číslice a, b teda musia spĺňať podmienku $a + b \leqq 9$.

Ku každému $a \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ možno číslicu b zvoliť $10 - a$ spôsobmi tak, aby platilo $a + b \leqq 9$ ($b \in \{0, 1, 2, \dots, 9 - a\}$). Číslica c je potom určená jednoznačne ako súčet $a + b$. Palindrómov s číslicou $a = 1$ je preto 9, palindrómov s číslicou $a = 2$ je 8, atď., až napokon pre číslicu $a = 9$ existuje práve jeden palindróm.

Počet všetkých päťmiestnych palindrómov, ktoré sú deliteľné číslom 37, je teda

$$9 + 8 + 7 + \dots + 1 = 45.$$

---

2. *Pre ľubovoľné kladné celé číslo n zostavme z písmen A a B všetky možné „slová" dĺžky n a označme p_n počet tých z nich, ktoré neobsahujú ani trojicu AAA po sebe nasledujúcich písmen A ani dvojicu BB po sebe nasledujúcich písmen B. Zistite, pre ktoré kladné celé čísla n platí, že obe čísla p_n a p_{n+1} sú párne.* (R. Kučera)

Riešenie.

Počet vyhovujúcich slov dĺžky $n \geqq 2$, ktoré končia dvojicami písmen AA, AB, BA označme postupne $(aa)_n$, $(ab)_n$, $(ba)_n$; počet vyhovujúcich slov dĺžky $n \geqq 1$, ktoré končia písmenom A, resp. B, označme a_n, resp. b_n. Pre všetky prirodzené čísla $n \geqq 2$ platí

$$\begin{aligned} a_n &= (aa)_n + (ba)_n, \\ b_n &= (ab)_n, \\ p_n &= a_n + b_n = (aa)_n + (ba)_n + (ab)_n. \end{aligned}$$

Existujú práve dve vyhovujúce slová dĺžky jedna, a to slová A a B, a práve tri vyhovujúce slová dĺžky dva, a to slová AA, AB, BA. Preto $a_1 = b_1 = 1$, $p_1 = 2$, $(aa)_2 = (ab)_2 = (ba)_2 = 1$, $a_2 = 2$, $b_2 = 1$, $p_2 = 3$.

Každé vyhovujúce slovo dĺžky $n \geqq 3$, ktoré končí dvojicou písmen AA, dostaneme tak, že pripíšeme písmeno A na koniec slova dĺžky $n-1$ končiaceho dvojicou BA. Preto platí

$$(aa)_n = (ba)_{n-1}.$$

Analogicky zistíme, že pre každé $n \geqq 3$ platia tiež vzťahy

$$
\begin{aligned}
(ba)_n &= (ab)_{n-1},\\
(ab)_n &= (aa)_{n-1} + (ba)_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Pretože nás zaujíma iba parita prirodzeného čísla p_n a výrazov, pomocou ktorých ho počítame, môžeme na základe uvedených rovností zostaviť tabuľku zo symbolov P a N, ktorým zodpovedajú párne resp. nepárne čísla.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$(aa)_n$		N	N	N	P	P	N	P	N	...
$(ba)_n$		N	N	P	P	N	P	N	N	...
$(ab)_n$		N	P	P	N	P	N	N	N	...
a_n	N	P	P	N	P	N	N	N	P	...
b_n	N	N	P	P	N	P	N	N	N	...
p_n	P	N	P	N	N	N	P	P	N	...

Táto tabuľka je nutne periodická, pretože existuje iba osem rôznych usporiadaných trojíc písmen P a N, takže najviac po ôsmich stĺpcoch sa vzhľadom na dokázanú rekurenciu začnú hodnoty postupností $((aa)_n)$, $((ba)_n)$, $((ab)_n)$ opakovať. Hodnoty postupností (a_n), (b_n), (p_n) sú z nich odvodené, takže sa začnú opakovať tiež. Z tabuľky vidíme, že jej perióda je 7 (prvé dva zhodné stĺpce sú pre $n = 2$ a $n = 9$). A pretože v príslušnom úseku tabuľky je dvojica susedných párnych čísel p_7, p_8 jediná, sú obe čísla p_n a p_{n+1} párne práve vtedy, keď je číslo n deliteľné siedmimi.

Poznámka. Z vyššie uvedených vzťahov môžeme odvodiť rekurentné rovnice pre čísla a_n a b_n. Pre všetky prirodzené čísla $n \geqq 4$ platí

$$
\begin{aligned}
a_n &= (aa)_n + (ba)_n = (ba)_{n-1} + (ab)_{n-1} =\\
&= (ab)_{n-2} + (ab)_{n-1} = b_{n-2} + b_{n-1},\\
b_n &= (ab)_n = (aa)_{n-1} + (ba)_{n-1} = a_{n-1}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Tieto rovnice môžeme odvodiť aj nasledujúcou úvahou. Vyhovujúce slovo končiace písmenom A má koncovku BA alebo BAA, počet slov prvého typu je b_{n-1}, slov druhého typu je b_{n-2}. Vyhovujúce slovo končiace písmenom B má nutne koncovku AB a týchto slov je a_{n-1}.

Zo vzťahov uvedených v (1) možno odvodiť rekurentnú rovnicu priamo pre čísla p_n. Pre každé $n \geqq 4$ totiž platí

$$
\begin{aligned}
a_n &= b_{n-1} + b_{n-2} = a_{n-2} + a_{n-3},\\
b_n &= a_{n-1} = b_{n-2} + b_{n-3}.
\end{aligned}
$$

Vzhľadom na to, že $p_n = a_n + b_n$, dostaneme sčítaním týchto vzťahov rovnicu

$$
p_n = p_{n-2} + p_{n-3},
$$

ktorú môžeme odvodiť aj takto: Každé vyhovujúce slovo dĺžky n má práve jednu z koncoviek $ABAA$, ABA, BAB, $BAAB$, pritom koncovky ABA a BAB má práve p_{n-2} slov, zatiaľ čo koncovky $ABAA$ a $BAAB$ má práve p_{n-3} slov.

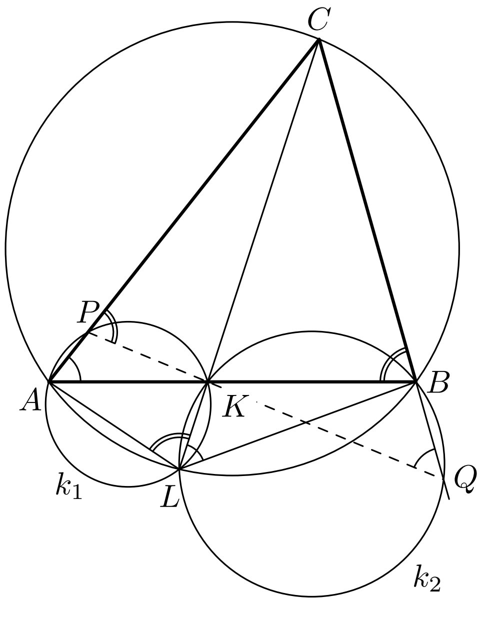
3. *Označme K ľubovoľný vnútorný bod strany AB daného trojuholníka ABC. Priamka CK pretína kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bode L ($L \neq C$). Označme k_1 kružnicu opísanú trojuholníku AKL a k_2 kružnicu opísanú trojuholníku BKL.*

a) Dokážte, že priamka AC je dotyčnicou ku kružnici k_1 práve vtedy, keď priamka BC je dotyčnicou ku kružnici k_2.

b) Predpokladajme, že priamka AC je sečnicou kružnice k_1. Nech P ($P \neq A$) je priesečník priamky AC s kružnicou k_1 a Q ($Q \neq B$) je priesečník priamky BC s kružnicou k_2. Dokážte, že bod K leží na úsečke PQ.

(J. Šimša, J. Zhouf)

Riešenie. a) V tetivovom štvoruholníku $ALBC$ platí $\alpha = |\measuredangle BAC| = |\measuredangle BLC|$ a $\beta = |\measuredangle ABC| = |\measuredangle ALC|$ (obr. 1). Z rovnosti obvodového a príslušného úsekového uhla pre tetivu AK v kružnici k_1 vyplýva, že priamka AC je dotyčnicou ku kružnici k_1 práve vtedy, keď platí $|\measuredangle CAK| = |\measuredangle ALK|$, t. j. práve vtedy, keď $\alpha = \beta$. Z analogických dôvodov je priamka BC dotyčnicou ku kružnici k_2 práve vtedy, keď $\beta = \alpha$. Priamka AC je preto dotyčnicou ku kružnici k_1 práve vtedy, keď priamka BC je dotyčnicou ku kružnici k_2, čo sme chceli dokázať.



Obr. 1

b) Podľa časti a) vieme, že platí $\alpha = |\measuredangle BAC| = |\measuredangle BLK|$ a $\beta = |\measuredangle ABC| = |\measuredangle ALK|$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že platí $\alpha < \beta$. Dotyčnica v bode A ku kružnici k_1 zviera s tetivou AK úsekový uhol $\beta > \alpha$, preto leží bod P na polpriamke AC, zatiaľ čo bod Q leží analogicky na polpriamke opačnej k BC. Z tetivových štvoruholníkov $ALKP$ a $BQLK$ vyplývajú rovnosti $|\measuredangle KPC| = \beta$ a $|\measuredangle BQK| = \alpha$ (obr. 1). Trojuholníky APK a QBK sa preto zhodujú v dvoch uhloch (pri vrcholoch A, Q a P, B). Zhodujú sa teda aj v uhle pri spoločnom vrchole K, takže

$$|\measuredangle AKP| = |\measuredangle BKQ| \ (= \beta - \alpha).$$

Odtiaľ vyplýva, že body P, K, Q ležia na jednej priamke. Tým je tvrdenie časti b) dokázané.

Poznámka. Dokázali sme vlastne nasledujúce tvrdenie: Ak je trojuholník ABC rovnoramenný s ramenami AC, BC, dotýkajú sa obe ramená zodpovedajúcich kružníc k_1 a k_2 vo vrcholoch A a B. A tiež naopak, ak trojuholník ABC nie je rovnoramenný, pretínajú jeho strany AC a BC zodpovedajúce kružnice k_1 a k_2 v ďalších bodoch P a Q ($P \neq A$, $Q \neq B$), pričom ich spojnica PQ prechádza daným bodom K.

---

4. *Nech K, L a M sú postupne priesečníky osí vnútorných uhlov α, β a γ pri vrcholoch A, B a C daného trojuholníka ABC s protiľahlými stranami BC, CA a AB. Dokážte, že platí nerovnosť*

$$\frac{|BC|}{|AK|}\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{|CA|}{|BL|}\cos\frac{\beta}{2}+\frac{|AB|}{|CM|}\cos\frac{\gamma}{2}\geqq 3.$$

(J. Švrček)

Riešenie. Použitím sínusovej vety v trojuholníkoch BKA a CKA dostaneme

$$\frac{|BK|}{|AK|}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\beta} \qquad \text{a} \qquad \frac{|CK|}{|AK|}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\gamma}.$$

Sčítaním oboch predošlých rovností vyjde

$$\frac{|BC|}{|AK|}=\frac{|BK|}{|AK|}+\frac{|CK|}{|AK|}=\sin\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\right).$$

Ak obe strany ostatnej nerovnosti vynásobíme výrazom $2\cos(\alpha/2)$, dostaneme po úprave

$$2\frac{|BC|}{|AK|}\cos\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha\left(\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\right). \tag{1}$$

Cyklickou zámenou získame ďalšie dve analogické rovnosti

$$2\frac{|CA|}{|BL|}\cos\frac{\beta}{2}=\sin\beta\left(\frac{1}{\sin\gamma}+\frac{1}{\sin\alpha}\right), \tag{2}$$

$$2\frac{|AB|}{|CM|}\cos\frac{\gamma}{2}=\sin\gamma\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\right). \tag{3}$$

Sčítaním rovností (1), (2) a (3) dostaneme po vydelení dvoma rovnosť

$$\frac{|BC|}{|AK|}\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{|CA|}{|BL|}\cos\frac{\beta}{2}+\frac{|AB|}{|CM|}\cos\frac{\gamma}{2}=$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}+\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right).$$

Vzhľadom na to, že $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ sú kladné čísla, môžeme každý z troch výrazov v zátvorkách na pravej strane ostatnej rovnosti odhadnúť zdola číslom dva (využívame známu nerovnosť $a/b+b/a\geqq 2$, ktorá je pre ľubovoľné kladné čísla a, b ekvivalentná so zrejmou nerovnosťou $(a-b)^2\geqq 0$). Odtiaľ vyplýva požadovaná nerovnosť. Tým je dôkaz hotový.