

67. ročník Matematickej olympiády
2017/2018

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z5

Informácia pre okresnú komisiu MO:

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideluje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín okresných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.

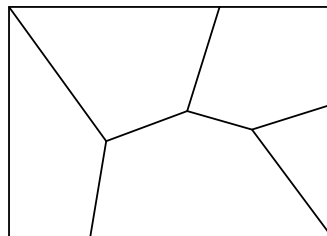
Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu okresného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: skmo.sk. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu skmo@skmo.sk v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke skmo.sk/dokument.php?id=429 nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skráteno len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.

1. Na obrázku je znázornených päť výbehov časti zoo. Každý výbeh obýva jeden z piatich druhov zvierat. Pritom vieme, že

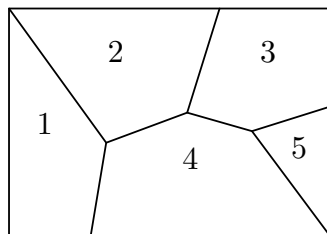
- výbeh žiráf má päť strán,
- výbeh opíc nesusedí ani s výbehom nosorožcov, ani s výbehom žiráf,
- výbeh levov má rovnaký počet strán ako výbeh opíc,
- tulene majú vo výbehu jazierko.

Určte, ktoré zvieratá sú v ktorom výbehu.

(Erika Novotná)



Riešenie. Označme jednotlivé výbehy ciframi ako na obrázku:



Podľa prvej informácie sú žirafy buď vo výbehu 3, alebo 4. Podľa druhej informácie vieme, že výbeh žiráf nemá susediť s výbehom opíc. Výbeh 4 však susedí so všetkými ostatnými výbehmi, preto musia byť žirafy vo výbehu 3.

Jediný výbeh, ktorý s výbehom žiráf nesusedí, je výbeh 1. Podľa druhej informácie musia byť vo výbehu 1 opice.

Okrem výbehu žiráf nesusedí s výbehom opíc už len výbeh 5. Podľa druhej informácie musia byť vo výbehu 5 nosorožce.

Jediný výbeh, ktorý má rovnaký počet strán ako výbeh opíc, je výbeh 2. Podľa tretej informácie musia byť vo výbehu 2 levy.

Ostáva jediný neobsadený výbeh, a to výbeh 4. Tulene sú teda vo výbehu 4.

Návrh hodnotenia. Po 1 bode za umiestnenie zvierat do výbehov, 1 bod za kvalitu komentára. Čiastkové odpovede typu „žirafy sú vo výbehu 3 alebo 4“ hodnotíte po 1 bode. Za riešenie bez zdôvodnenia dajte nanajvyš 2 body.

2. Na stole ležalo päť kartičiek s navzájom rôznymi kladnými celými číslami. Marek spočítal, že najväčšie z čísel na kartičkách je o 8 väčšie ako najmenšie číslo. Adam vzal zo stola kartičky s najmenšími dvoma číslami a spočítal, že súčin týchto dvoch čísel je rovný 12. Dominik potom spočítal, že súčet čísel na zvyšných troch kartičkách je rovný 25. Ktoré čísla mohli byť napísané na kartičkách? Nájdite tri riešenia.

(Lucie Růžičková)

Riešenie. Číslo 12 možno ako súčin dvoch kladných celých čísel, z ktorých prvé je menšie ako druhé, získať tromi spôsobmi:

$$1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4.$$

Ak by najmenšie dve čísla boli 1 a 12, najväčšie z čísel by malo byť $1 + 8 = 9$. To však nie je možné, keďže 12 nie je menšie ako 9.

Ak by najmenšie dve čísla boli 2 a 6, najväčšie číslo by bolo $2 + 8 = 10$. Zvyšné dve čísla potom majú byť rôzne čísla väčšie ako 6 a menšie ako 10, ktoré spolu s číslom 10 dávajú súčet 25. To spĺňajú iba čísla 7 a 8.

Ak by najmenšie dve čísla boli 3 a 4, najväčšie číslo by bolo $3 + 8 = 11$. Zvyšné dve čísla potom majú byť rôzne čísla väčšie ako 4 a menšie ako 11, ktoré spolu s číslom 11 dávajú súčet 25. To spĺňajú dvojice čísel 5 a 9 a aj 6 a 8.

Tri vyhovujúce päťice čísel teda sú

$$(2, 6, 7, 8, 10), \quad (3, 4, 5, 9, 11), \quad (3, 4, 6, 8, 11).$$

Návrh hodnotenia. 2 body za každú päťicu čísel: vždy 1 bod za nájdenie danej päťice a 1 bod za odvodenie alebo overenie, že vyhovuje zadaniu.

3. Zostrojte štvorec $ABCD$ so stranou dĺžky 6 cm a priesečník jeho uhlopriečok označte S . Zostrojte bod K tak, aby spolu s bodmi S, B, C tvoril štvorec $BKCS$. Zostrojte bod L tak, aby spolu s bodmi S, A, D tvoril štvorec $ASDL$. Zostrojte úsečku KL , priesečník úsečiek KL a AD označte X , priesečník úsečiek KL a BC označte Y . Zo zadaných údajov vypočítajte dĺžku lomenej čiary $KYBAXL$. (Lucie Růžičková)

Riešenie. Konštrukcia:

- Štvorec $ABCD$ so stranou dĺžky 6 cm,
- bod S ako priesečník úsečiek AC a BD ,

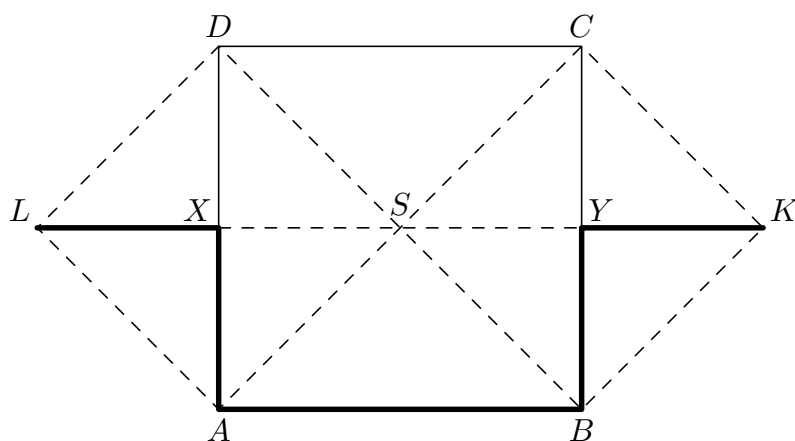
- bod K ako priesečník kolmice na SB v bode B a kolmice na SC v bode C ,
- bod L ako priesečník kolmice na SA v bode A a kolmice na SD v bode D ,
- body X a Y ako priesečníky úsečky KL so stranami AD a BC .

Výpočet: Dĺžka lomenej čiary $KYBAXL$ je súčtom dĺžok úsečiek KY , YB , BA , AX a XL . Pritom dĺžka úsečky AB je 6 cm.

Bod Y je priesečníkom uhlopriečok štvorca $BKCS$, preto je stredom každej z týchto úsečiek. Úsečka BC je stranou zadaného štvorca, a tá meria 6 cm. Každá z úsečiek KY a YB teda meria 3 cm.

Z obdobného dôvodu aj každá z úsečiek AX a XL meria 3 cm.

Dĺžka lomenej čiary $KYBAXL$ je $3 + 3 + 6 + 3 + 3 = 18$ (cm).



Návrh hodnotenia. 2 body za prevedenie konštrukcie. 4 body za výpočet, z toho 2 body za určenie a zdôvodnenie, že body X a Y sú stredmi príslúchajúcich štvorcov a 2 body za doriešenie a výsledok. Len za sčítanie dĺžok úsečiek bez zdôvodnenia (alebo s odkazom na meranie zostrojených dĺžok v obrázku) dajte nanajvyš 1 bod.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník

Recenzenti: Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018