2003/2004
53. ročník MO *Riešenia úloh celoštátneho kola kategórie A*

1. *Určte všetky trojice (x, y, z) reálnych čísel, pre ktoré platí*

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqq 6 + \min\left\{x^2 - \frac{8}{x^4},\ y^2 - \frac{8}{y^4},\ z^2 - \frac{8}{z^4}\right\}.$$

(*J. Švrček*)

Riešenie. Ak nejaká trojica $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ $(xyz \neq 0)$ vyhovuje podmienkam úlohy, je riešením sústavy nerovníc

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &\leqq 6 + x^2 - \frac{8}{x^4}, & \qquad & \frac{8}{x^4} + y^2 + z^2 \leqq 6,\\ x^2 + y^2 + z^2 &\leqq 6 + y^2 - \frac{8}{y^4}, & \text{t. j.} \qquad & x^2 + \frac{8}{y^4} + z^2 \leqq 6,\\ x^2 + y^2 + z^2 &\leqq 6 + z^2 - \frac{8}{z^4}, & \qquad & x^2 + y^2 + \frac{8}{x^4} \leqq 6. \end{aligned}$$

Sčítaním všetkých troch nerovníc tejto sústavy dostaneme nerovnicu

$$\left(\frac{8}{x^4} + x^2 + x^2\right) + \left(\frac{8}{y^4} + y^2 + y^2\right) + \left(\frac{8}{z^4} + z^2 + z^2\right) \leqq 18.$$

Výrazy v každej z troch zátvoriek na ľavej strane možno odhadnúť použitím nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom trojice kladných čísel. Obdržíme tak postupne

$$\begin{aligned} 18 &\geqq \left(\frac{8}{x^4} + x^2 + x^2\right) + \left(\frac{8}{y^4} + y^2 + y^2\right) + \left(\frac{8}{z^4} + z^2 + z^2\right) \geqq \\ &\geqq 3\sqrt[3]{\frac{8}{x^4}\cdot x^2\cdot x^2} + 3\sqrt[3]{\frac{8}{y^4}\cdot y^2\cdot y^2} + 3\sqrt[3]{\frac{8}{z^4}\cdot z^2\cdot z^2} = 18. \end{aligned}$$

Odtiaľ vyplýva, že v každej z troch použitých nerovností medzi aritmetickým a geometrickým priemerom nastane rovnosť, takže príslušná trojica čísel má vždy tri rovnaké zložky. Musí teda súčasne platiť

$$\frac{8}{x^4} = x^2, \qquad \frac{8}{y^4} = y^2, \qquad \frac{8}{z^4} = z^2,$$

t. j.

$$x^6 = y^6 = z^6 = 8.$$

Z ostatnej podmienky bezprostredne vyplýva

$$(x, y, z) = \left(\varepsilon_1\sqrt{2}, \varepsilon_2\sqrt{2}, \varepsilon_3\sqrt{2}\right), \quad \text{kde } \varepsilon_i \in \{-1; 1\} \text{ pre } i = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Vzhľadom na použité dôsledkové úpravy je nutné urobiť skúšku, pomocou ktorej zistíme, že všetkých 8 trojíc reálnych čísel určených vzťahom (1) vyhovuje podmienkam úlohy.

Iné riešenie. Nech trojica $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ $(xyz \neq 0)$ je riešením danej úlohy. Označme

$$A = \min\{x^2, y^2, z^2\} > 0.$$

Potom platí

$$\min\left\{x^2 - \frac{8}{x^4}, y^2 - \frac{8}{y^4}, z^2 - \frac{8}{z^4}\right\} = A - \frac{8}{A^2}.$$

Preto tiež

$$A + A + A \leqq x^2 + y^2 + z^2 \leqq 6 + \min\left\{x^2 - \frac{8}{x^4}, y^2 - \frac{8}{y^4}, z^2 - \frac{8}{z^4}\right\} = \\ = 6 + A - \frac{8}{A^2}.$$

Po úprave dostaneme nerovnosť, ktorej pravú stranu odhadneme použitím nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom:

$$6 \geqq A + A + \frac{8}{A^2} \geqq 3\sqrt[3]{A \cdot A \cdot \frac{8}{A^2}} = 6.$$

To znamená, že vo všetkých použitých nerovnostiach musí nastať rovnosť, a teda

$$2 = A = x^2 = y^2 = z^2.$$

Skúškou opäť overíme, že všetky trojice určené vzťahom (1) sú riešením zadanej nerovnice.

---

2. *Pre ľubovoľné prirodzené číslo n zostavme z písmen A a B všetky možné „slová“ dĺžky n a označme p_n počet tých, ktoré neobsahujú štvoricu $AAAA$ po sebe idúcich písmen A ani trojicu BBB po sebe idúcich písmen B. Určte hodnotu výrazu*

$$\frac{p_{2004} - p_{2002} - p_{1999}}{p_{2001} + p_{2000}}.$$

(*R. Kučera*)

Riešenie. Počet vyhovujúcich slov dĺžky n, ktoré končia písmenom A, resp. B, označme a_n, resp. b_n. Platí

$$p_n = a_n + b_n. \tag{1}$$

Nech $n \geqq 4$. Vyhovujúce slovo končiace písmenom A má jednu z koncoviek BA, BAA, alebo $BAAA$. Počet slov prvého typu je b_{n-1}, druhého typu b_{n-2}, tretieho typu b_{n-3}. Preto

$$a_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3}. \tag{2}$$

Podobne pre $n \geqq 3$ má vyhovujúce slovo končiace písmenom B jednu z koncoviek AB, ABB, teda

$$b_n = a_{n-1} + a_{n-2}. \tag{3}$$

Nech ďalej $n \geqq 6$. Každé z čísel b_i vo vzťahu (2) vyjadrime pomocou (3), dostaneme tak

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3} = \\ &= (a_{n-2} + a_{n-3}) + (a_{n-3} + a_{n-4}) + (a_{n-4} + a_{n-5}) = \\ &= a_{n-2} + 2a_{n-3} + 2a_{n-4} + a_{n-5}. \end{aligned} \tag{4}$$

Podobne dostaneme

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n-1} + a_{n-2} = \\ &= (b_{n-2} + b_{n-3} + b_{n-4}) + (b_{n-3} + b_{n-4} + b_{n-5}) = \\ &= b_{n-2} + 2b_{n-3} + 2b_{n-4} + b_{n-5}. \end{aligned} \tag{5}$$

Sčítaním vzťahov (4) a (5) dostaneme podľa (1)

$$p_n = p_{n-2} + 2p_{n-3} + 2p_{n-4} + p_{n-5}.$$

Preto pre ľubovoľné prirodzené číslo $n \geqq 6$ platí

$$\frac{p_n - p_{n-2} - p_{n-5}}{p_{n-3} + p_{n-4}} = 2,$$

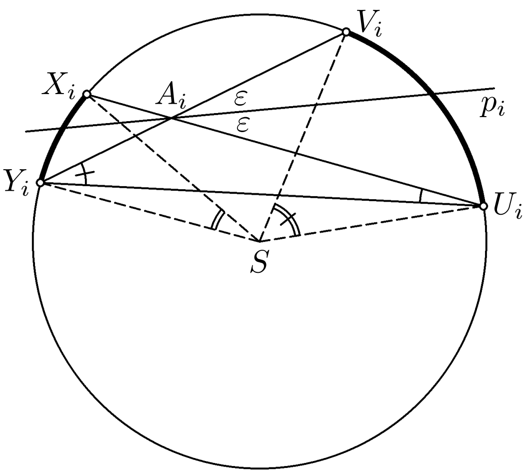
takže zadaný zlomok má hodnotu 2 aj pre $n = 2004$.

---

3. *V rovine je daná kružnica k a 121 jej sečníc $p_1, p_2, \ldots, p_{121}$. Vnútri tejto kružnice je na každej priamke p_i daný bod A_i. Dokážte, že na kružnici k existuje taký bod X, že úsečka A_iX zviera s priamkou p_i uhol menší ako $21°$ pre najmenej 29 rôznych indexov i.*

(J. Šimša)

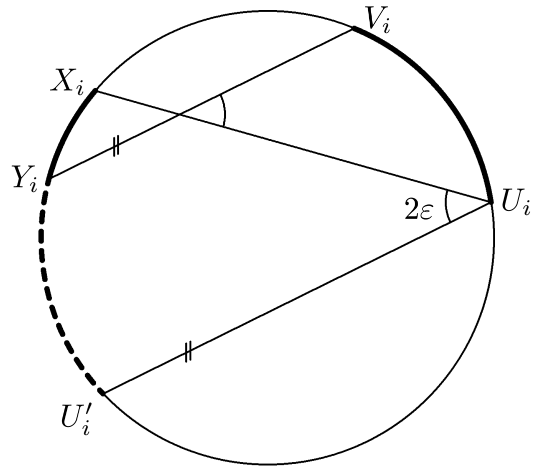
Riešenie. Pre ľubovoľné i, $1 \leqq i \leqq 121$, označme $\mathcal{M}_i$ množinu všetkých bodov X



Obr. 1

kružnice k, pre ktoré úsečka A_iX zviera s príslušnou priamkou p_i uhol veľkosti menšej ako $\varepsilon = 21°$. Množina $\mathcal{M}_i$ je zrejme tvorená dvoma oblúkmi X_iY_i a U_iV_i (obr. 1). Obom uvažovaným oblúkom kružnice k zodpovedá dvojica stredových uhlov X_iSY_i

a U_iSV_i, kde S je stred danej kružnice k. Ukážeme, že pre každé $i \in \{1, 2, \ldots, 121\}$ platí $|\measuredangle X_iSY_i| + |\measuredangle U_iSV_i| = 4\varepsilon = 84°$.



Obr. 2

V trojuholníku $A_iY_iU_i$ je súčet veľkostí vnútorných uhlov pri vrcholoch Y_i a U_i rovný veľkosti vedľajšieho uhla pri vrchole A_i, t. j. 2ε. Na druhej strane, súčet oboch uvažovaných uhlov v tomto trojuholníku je rovný súčtu obvodových uhlov prislúchajúcich oblúkom X_iY_i a U_iV_i. Zo vzťahu medzi obvodovým a stredovým uhlom dostávame

$$|\measuredangle X_iSY_i| + |\measuredangle U_iSV_i| = 2 \cdot 2\varepsilon = 4\varepsilon = 84°.$$

Celkovo tak 121 uvažovaným tetivám p_i a ich bodom A_i zodpovedá 121 dvojíc oblúkov X_iY_i a U_iV_i kružnice k s celkovou oblúkovou dĺžkou $121 \cdot 84° = 10\,164°$. Pokiaľ každý bod X kružnice k leží najviac v 28 množinách $\mathcal{M}_i$, musí byť uvedený súčet všetkých oblúkových dĺžok rovný najviac $28 \cdot 360° = 10\,080°$, čo neplatí. Preto existuje aspoň jeden bod kružnice k, ktorý leží súčasne aspoň v 29 množinách $\mathcal{M}_i$, čo sme mali dokázať.

Poznámka. Že obom oblúkom X_iY_i a U_iV_i zodpovedá spolu stredový uhol 4ε, nahliadneme ľahko aj z obr. 2, lebo oblúky $U_i'Y_i$ a U_iV_i sú zhodné.

---

4. *Zistite, pre ktoré prirodzené čísla n je súčet*

$$\frac{n}{1!} + \frac{n}{2!} + \ldots + \frac{n}{n!}$$

celé číslo. (*E. Kováč*)

Riešenie. Pre n rovné 1, 2 a 3 je daný súčet postupne rovný celým číslam 1, 3, 5. Predpokladajme preto ďalej, že $n > 3$. Jednoduchou úpravou dostaneme

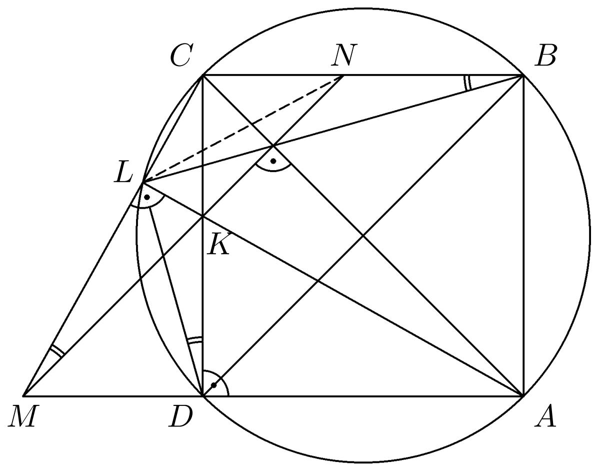
$$\frac{n}{1!} + \frac{n}{2!} + \cdots + \frac{n}{(n-2)!} + \frac{n}{(n-1)!} + \frac{n}{n!} = \\ = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 + n(n-1) \cdot \ldots \cdot 3 + \cdots + n(n-1) + n + 1}{(n-1)!}.$$

Ak je ostatný zlomok celé číslo, je nutne číslo $n - 1$ deliteľom jeho čitateľa. Preto je číslo $n-1$ deliteľom čísla $n+1$. Pretože najväčší spoločný deliteľ dvoch čísel je deliteľom aj ich rozdielu, je najväčší spoločný deliteľ čísel $n - 1$ a $n + 1$ deliteľom čísla 2, takže $n - 1 \in \{1, 2\}$, čo je v spore s predpokladom $n > 3$.

Daný súčet je celé číslo pre prirodzené čísla n z množiny $\{1, 2, 3\}$.

5. *Nech L je ľubovoľný vnútorný bod kratšieho oblúka CD kružnice opísanej štvorcu $ABCD$. Označme K priesečník priamok AL a CD, M priesečník priamok AD a CL a N priesečník priamok MK a BC. Dokážte, že body B, L, M, N ležia na tej istej kružnici.* (J. Švrček)

Riešenie. Uhlopriečka AC je priemerom kružnice opísanej štvorcu $ABCD$, takže podľa Tálesovej vety je uhol ALC pravý (obr. 3). Bod K je tak priesečníkom výšok CD a AL v trojuholníku ACM, takže aj priamka MK je kolmá na AC a pretína stranu BC daného štvorca v jej vnútornom bode N, lebo $MK \parallel DB$.



Obr. 3

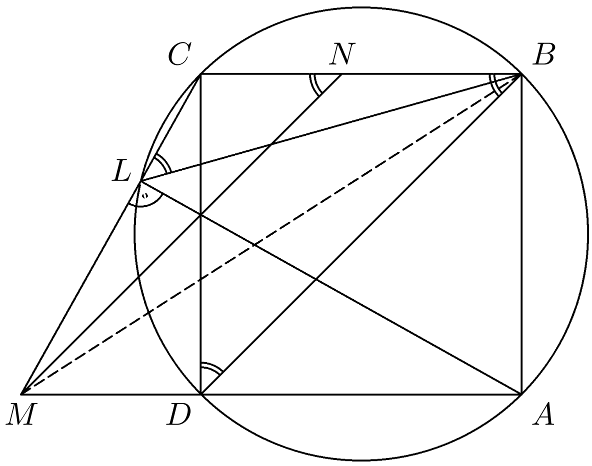
Teraz možno tvrdenie úlohy dokázať niekoľkými spôsobmi.

Prvý spôsob. Štvoruholníky $BCLD$ a $KLMD$ sú tetivové, preto podľa vety o obvodových uhloch postupne platí

$$|\measuredangle NBL| = |\measuredangle CBL| = |\measuredangle CDL| = |\measuredangle KDL| = |\measuredangle KML| = |\measuredangle NML|.$$

Pretože body B a M ležia v rovnakej polrovine určenej priamkou NL, ležia body B, L, M, N na jednej kružnici.

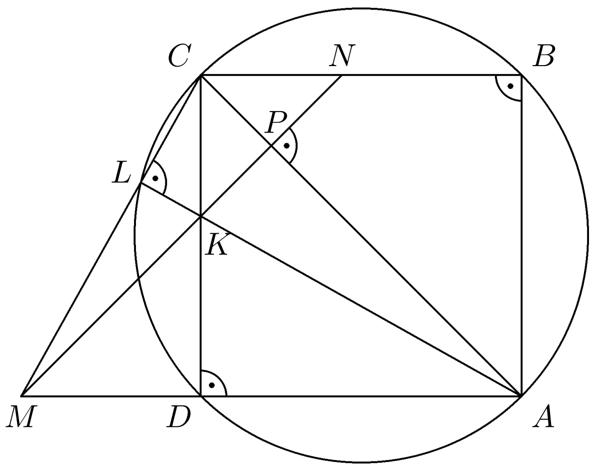
Druhý spôsob. Pretože $MN \parallel DB$, platí $|\measuredangle MNC| = 45°$, rovnako uhol BLC nad tetivou BC kružnice k má veľkosť 45° (obr. 4), takže $|\measuredangle BLM| = |\measuredangle BNM| = 135^\circ$.



Obr. 4

Body L a N zrejme ležia v rovnakej polrovine určenej priamkou MB, preto ležia body B, L, M, N na jednej kružnici.

Tretí spôsob. Označme P pätu výšky z vrcholu M na stranu AC a uvažujme štvoruholníky $ABNP$, $APKD$ a $DKLM$ (obr. 5). Podľa Tálesovej vety sú všetky tri



Obr. 5

štvoruholníky tetivové. Vrchol C daného štvorca $ABCD$ leží mimo každej z troch kružníc opísaných uvažovaným tetivovým štvoruholníkom, takže použitím vety o mocnosti bodu C ku kružniciam opísaným postupne štvoruholníkom $ABNP$, $APKD$, $DKLM$ dostaneme tri rovnosti

$$|CN| \cdot |CB| = |CP| \cdot |CA|,$$
$$|CP| \cdot |CA| = |CK| \cdot |CD|,$$
$$|CK| \cdot |CD| = |CL| \cdot |CM|,$$

z ktorých bezprostredne vyplýva rovnosť

$$|CN| \cdot |CB| = |CL| \cdot |CM|.$$

Odtiaľ už vyplýva, že body B, L, M, N leží na jednej kružnici.

---

6. *Nech $\mathbb{R}^+$ je množina všetkých kladných reálnych čísel. Určte všetky funkcie $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, ktoré pre všetky kladné čísla x, y spĺňajú rovnosť*

$$x^2\bigl(f(x)+f(y)\bigr) = (x+y)f\bigl(f(x)y\bigr).$$

(*P. Kaňovský*)

Riešenie. Nech f je ľubovoľná z hľadaných funkcií. Označme $f(1) = p$. Vzhľadom na podmienky úlohy platí $p > 0$.

V danom vzťahu položme $x = 1$, $y = 1$. Po úprave dostaneme

$$p = f(p). \tag{1}$$

V danom vzťahu ďalej položme $x = p$, $y = 1$. Potom

$$p^2\bigl(f(p)+p\bigr) = (p+1)f\bigl(f(p)\bigr)$$

a podľa (1) vyjde

$$2p^3 = (p+1)p.$$

Táto algebraická rovnica má tri reálne korene $-1/2$, 0, 1. Jediný koreň vyhovujúci podmienke $p > 0$ je $p = 1$, teda

$$f(1) = 1. \tag{2}$$

Nech t je ľubovoľné kladné reálne číslo. V danom vzťahu položme $x = 1$, $y = t$, takže vzhľadom na (2) dostaneme

$$1 + f(t) = (1+t)f(t).$$

Odtiaľ po úprave

$$f(t) = \frac{1}{t}. \tag{3}$$

Dosadením ľahko overíme, že funkcia $f(t) = 1/t$ vyhovuje rovnici zo zadania. Funkcia určená vzťahom (3) je jediné riešenie danej úlohy.

Iné riešenie. Predpokladajme, že existuje funkcia daných vlastností a ľubovoľnú z takých funkcií označme f.

Nech t je ľubovoľné kladné reálne číslo. V danom vzťahu položme $x = t$, $y = t$. Po úprave dostaneme

$$tf(t) = f\bigl(tf(t)\bigr).$$

Odtiaľ vyplýva, že množina $\mathsf{P} = \{p \in \mathbb{R}^+;\ p = f(p)\}$ je neprázdna, pretože pre každé kladné reálne číslo t je $tf(t)$ prvkom P.

Predpokladajme, že množina P obsahuje aspoň dve rôzne čísla, označme ich a a b. V danom vzťahu položme $x = a$, $y = b$. Dostaneme

$$a^2\bigl(f(a)+f(b)\bigr) = (a+b)f\bigl(f(a)b\bigr).$$

Vzhľadom na to, že $a = f(a)$, $f(a) + f(b) = a + b \neq 0$, dostaneme odtiaľ po úprave

$$a^2 = f(ab). \tag{4}$$

Ak položíme v danom vzťahu naopak $x = b$, $y = a$, dostaneme po podobnej úprave

$$b^2 = f(ab). \tag{5}$$

Vzhľadom na to, že a a b sú kladné čísla, vyplýva zo vzťahov (4) a (5) $a = b$, čo je spor s predpokladom, že množina P obsahuje aspoň dve rôzne čísla.

Množina P teda obsahuje práve jedno číslo, označme ho p ($p \in \mathbb{R}^+$). Z predchádzajúcich vzťahov vyplýva, že pre každé kladné reálne číslo t platí $tf(t) = p$, preto funkcia f má nutne tvar

$$f(t) = \frac{p}{t}.$$

Teraz dosaďme tento predpis do pôvodného vzťahu. Pre všetky $x, y \in \mathbb{R}^+$ tak dostaneme

$$x^2 \left(\frac{p}{x} + \frac{p}{y}\right) = (x + y)\frac{p}{\frac{p}{x}y}.$$

Úpravou získame $p = 1$.

Teda funkcia f daná pre všetky kladné reálne čísla t predpisom

$$f(t) = \frac{1}{t}$$

je jediná funkcia, ktorá vyhovuje danému vzťahu.