2003/2004
53. ročník MO *Riešenia úloh domáceho kola kategórie B*

1. *Každú z hviezdičiek na mieste jednotiek vo výraze*

$$\left|\frac{777\,777\,777\,77*}{777\,777\,777\,77*}-\frac{555\,555\,555\,554}{555\,555\,555\,559}\right|$$

nahraďte nejakou číslicou tak, aby výraz mal čo najmenšiu hodnotu. (J. Šimša)

Riešenie. Označme x a y číslice, ktoré doplníme do čitateľa, resp. menovateľa prvého zlomku. Pretože celý výraz v absolútnej hodnote budeme algebraicky upravovať, kvôli prehľadnejším zápisom zavedieme označenie $N = 111\,111\,111\,110$. Jednotlivé čísla z daného výrazu potom majú vyjadrenia

$$\begin{aligned}777\,777\,777\,77x &= 7N + x,\\ 777\,777\,777\,77y &= 7N + y,\\ 555\,555\,555\,554 &= 5N + 4,\\ 555\,555\,555\,559 &= 5N + 9.\end{aligned}$$

Skúmaný výraz teda možno zapísať a upraviť nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{7N+x}{7N+y}-\frac{5N+4}{5N+9}\right| = \frac{|(7N+x)(5N+9)-(5N+4)(7N+y)|}{(7N+y)(5N+9)} =\\ &= \frac{|(35N^2+5xN+63N+9x)-(35N^2+5yN+28N+4y)|}{(7N+y)(5N+9)} =\\ &= \frac{|5\cdot(7-y+x)\cdot N+9x-4y|}{(7N+y)(5N+9)}.\end{aligned}$$

Označme ešte čitateľa a menovateľa získaného zlomku

$$C = |5\cdot(7-y+x)\cdot N+9x-4y| \qquad \text{a} \qquad J = (7N+y)(5N+9).$$

Ak budeme za x, y dosadzovať rôzne dvojice číslic, menovateľ J bude nadobúdať iba desať rôznych hodnôt v rozmedzí

$$(7N+0)(5N+9) \leqq J \leqq (7N+9)(5N+9).$$

Pozrime sa teraz, aké hodnoty bude nadobúdať čitateľ C. Pretože číslo $9x-4y$ je najviac dvojciferné, zatiaľ čo číslo N dvanásťciferné, rád čitateľa C bude závisieť na tom, či bude činiteľ $(7-y+x)$ rovný nule alebo nie. Preto tieto dve možnosti rozoberieme osobitne.

Prípad $7-y+x=0$. Vtedy platí $y = x+7$ a skúmaný čitateľ C má tvar

$$C = |5\cdot 0\cdot N+(9x-4y)| = |9x-4(x+7)| = |5x-28|.$$

Keďže číslica y (rovná $x+7$) je najviac 9, je číslica x rovná 0, 1 alebo 2, takže výraz $|5x-28|$ sa rovná 28, 23 alebo 18. *Najmenšia* hodnota čitateľa C je preto rovná 18 a dostaneme ju jedine pre $x = 2$ a $y = 9$. Šťastnou „zhodou okolností“ má práve pre $y = 9$ menovateľ J *najväčšiu* hodnotu, takže

$$\min\left\{\frac{C}{J}\right\} = \frac{18}{(7N+9)(5N+9)}.$$

Prípad $7 - y + x \neq 0$. Ukážme, že hodnoty čitateľa C (teda aj hodnoty zlomku C/J) sú v tomto prípade „obrovské“ v porovnaní s prvým prípadom. Z nerovnosti $7 - y + x \neq 0$ vyplýva odhad $|7 - y + x| \geqq 1$ (číslo $7 - y + x$ je celé), teda máme

$$C = |5 \cdot (7 - y + x) \cdot N + 9x - 4y| \geqq 5 \cdot |7 - y + x| \cdot N - |9x - 4y| \geqq 5N - |9x - 4y|.$$

Pretože x a y sú číslice, platí zrejme $|9x - 4y| \leqq 81$. Z ostatného odhadu C a maximálnej hodnoty J preto vyplýva nerovnosť

$$\frac{C}{J} \geqq \frac{5N - 81}{(7N+9)(5N+9)}.$$

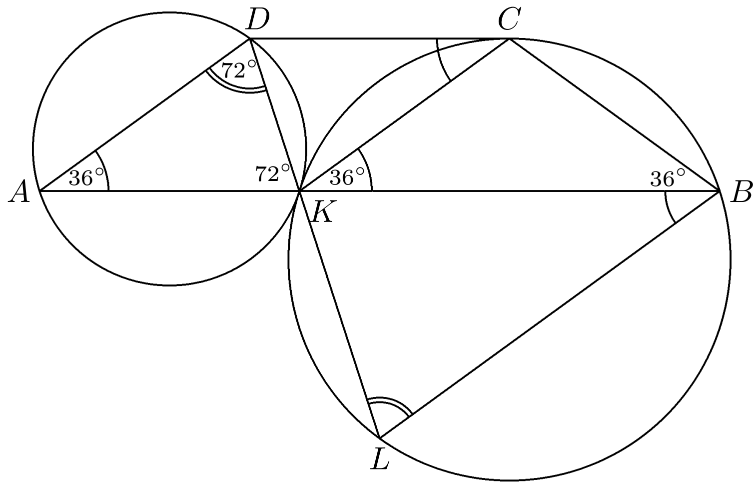
Ostatný zlomok je „mnohonásobne“ väčší ako zlomok v závere prvého prípadu, lebo oba zlomky majú rovnaký menovateľ, zatiaľ čo pre čitatele zrejme platí $5N - 81 \ggg 18$ (nerovnosť $5N - 81 > 18$ platí už od hodnoty $N = 20$).

Záver. Do čitateľa doplníme číslicu $x = 2$, do menovateľa číslicu $y = 9$.

---

2. *V rovnoramennom lichobežníku $ABCD$ platí $|BC| = |CD| = |DA|$ a $|\measuredangle DAB| = |\measuredangle ABC| = 36°$. Na základni AB je daný bod K tak, že $|AK| = |AD|$. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom AKD a KBC majú vonkajší dotyk.* (J. Zhouf)

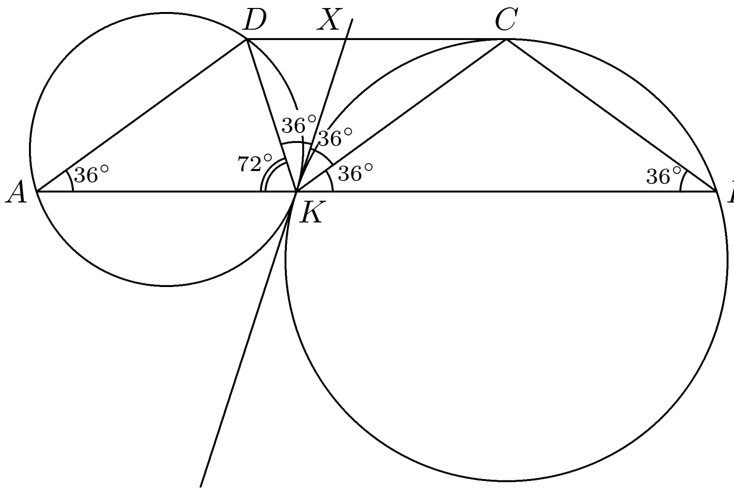
Riešenie. V rovnoramennom trojuholníku AKD poznáme uhol DAK oproti základni KD. Môžeme dopočítať zvyšné dva uhly pri základni (obr. 1): $|\measuredangle ADK| = |\measuredangle AKD| = (180° - |\measuredangle DAK|)/2 = 72°$. Štvoruholník $AKCD$ má protiľahlé strany AK a CD zhodné a rovnobežné, takže je to rovnobežník, preto priamky KC a AD sú rovnobežné. Uhly DAK a CKB sú teda súhlasné a uhly CKB a KCD striedavé. Preto $|\measuredangle CKB| = |\measuredangle KCD| = 36°$. Uhol DKC je doplnkom uhlov AKD a CKB do priameho uhla, platí teda $|\measuredangle DKC| = 180° - 36° - 72° = 72°$.



Obr. 1

Na polpriamke opačnej k polpriamke KD zvoľme bod L tak, že $|KL| = |AD|$. Potom $|\measuredangle LKB| = |\measuredangle AKD| = 72°$ a $|\measuredangle CKL| = |\measuredangle LKB| + |\measuredangle CKB| = 108°$. Dopočítaním uhlov v lichobežníku $ABCD$ dostávame $|\measuredangle BCD| = (360° - 2 \cdot 36°)/2 = 144°$ a môžeme vyjadriť veľkosť uhla BCK: $|\measuredangle BCK| = |\measuredangle BCD| - |\measuredangle KCD| = 144° - 36° = 108°$. Teraz už vieme, že $|KL| = |CB|$ a $|\measuredangle LKC| = |\measuredangle KCB|$, čo znamená, že $LBCK$ je rovnoramenný lichobežník, možno mu teda opísať kružnicu (zhodnú s kružnicou opísanou trojuholníku KBC). Ďalej môžeme z lichobežníka $LBCK$ dopočítať $|\measuredangle KLB| = (360° - 2 \cdot 108°)/2 = 72° = |\measuredangle KDA|$. Z tejto rovnosti vyplýva, že $AD \parallel BL$, takže trojuholníky ADK a BLK sú navzájom rovnoľahlé podľa stredu K. Rovnoľahlé sú potom aj kružnice im opísané. Pretože obe prechádzajú stredom K spomenutej rovnoľahlosti, majú v tomto bode vonkajší dotyk.

Iné riešenie. Rovnako ako v prvom riešení zistíme, že $|AKD| = 72°$. Štvoruholník $AKCD$ je rovnobežník (obr. 2), takže $|CK| = |AD|$. Z rovnosti $|CK| = |BC|$ v troj-



Obr. 2

uholníku KBC vyplýva, že $|\measuredangle CKB| = |\measuredangle KBC| = 36°$. Preto na základni CD existuje bod X taký, že $|\measuredangle AKX| = 108°$ (a $|\measuredangle BKX| = 72°$). Potom $|\measuredangle DKX| = |\measuredangle AKX| - |\measuredangle AKD| = 108° - 72° = 36°$, a teda $|\measuredangle DKX| = |\measuredangle DAK|$. Takže uhol DKX je úsekovým uhlom prislúchajúcim oblúku DAK v kružnici opísanej trojuholníku AKD, čo znamená, že priamka KX je jej dotyčnicou. Podobne $|\measuredangle CKX| = |\measuredangle BKX| - |\measuredangle BKC| = 72° - 36° = 36° = |\measuredangle KBC|$, takže KX je dotyčnicou aj ku kružnici opísanej trojuholníku KBC. Kružnice opísané trojuholníkom AKD a KBC majú teda spoločnú dotyčnicu KX prechádzajúcu spoločným bodom K. Obe kružnice sa preto v tomto bode dotýkajú.

---

3. *V obore reálnych čísel riešte rovnicu*

$$x\lfloor x \rfloor - 5x + 7 = 0,$$

kde $\lfloor x \rfloor$ znamená dolnú celú časť čísla x, teda najväčšie celé číslo k, pre ktoré platí $k \leqq x$. (Napríklad $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$ a $\lfloor -3{,}1 \rfloor = -4$.) (E. Kováč)

Riešenie. Označme $k = \lfloor x \rfloor$, teda $x = k + \alpha$, $0 \leqq \alpha < 1$. Daná rovnica má potom tvar $(k+\alpha)k - 5(k+\alpha) + 7 = 0$. Odtiaľ $\alpha = (k^2 - 5k + 7)/(5 - k)$. Hľadáme teda celé čísla k, pre ktoré platí

$$0 \leqq \frac{k^2 - 5k + 7}{5 - k} < 1. \tag{1}$$

Každú z týchto nerovností vyšetríme osobitne. Pretože kvadratický trojčlen $k^2 - 5k + 7$ má záporný diskriminant, platí $k^2 - 5k + 7 \geqq 0$ pre každé reálne číslo k. Takže ľavá nerovnosť v (1) platí práve vtedy, keď $5 - k > 0$, čiže $k < 5$. Vyriešme pravú nerovnicu:

$$\begin{aligned}
\frac{k^2 - 5k + 7}{5 - k} &< 1,\\
\frac{k^2 - 5k + 7 - (5 - k)}{5 - k} &< 0,\\
\frac{k^2 - 4k + 2}{5 - k} &< 0,\\
\frac{(k - 2 - \sqrt{2})(k - 2 + \sqrt{2})}{5 - k} &< 0.
\end{aligned}$$

Podľa polohy čísel $2 - \sqrt{2}$, $2 + \sqrt{2}$ a 5 na číselnej osi zistíme, že ostatná nerovnosť platí práve vtedy, keď k patrí do množiny $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}) \cup (5, \infty)$. Nerovnosti (1) teda platia súčasne práve vtedy, keď k leží v intervale $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$. Tejto podmienke vyhovujú iba tri celé čísla 1, 2 a 3. Pre $k = 1$ dopočítame $\alpha = 3/4$, pre $k = 2$ vyjde $\alpha = 1/3$ a pre $k = 3$ je $\alpha = 1/2$. Celkom dostávame tri riešenia $x_1 = 7/4$, $x_2 = 7/3$ a $x_3 = 7/2$.

Iné riešenie. Označíme $k = \lfloor x \rfloor$ ako v prvom riešení a z rovnice $kx - 5x + 7 = 0$ vyjadríme x v tvare $x = 7/(5 - k)$. Teraz hľadáme celé čísla k, pre ktoré platí $k \leqq 7/(5 - k) < k + 1$. Obe nerovnosti sú splnené jedine pre celé čísla 1, 2 a 3, ktorým zodpovedajú riešenia 7/4, 7/3 a 7/2.

---

4. *Číslo a_n vznikne tak, že za seba napíšeme prvých n po sebe idúcich prirodzených čísel, napríklad $a_{13} = 12\,345\,678\,910\,111\,213$. Zistite, koľko čísel deliteľných 24 sa nachádza medzi číslami $a_1, a_2, \ldots, a_{10\,000}$.* (*P. Černek*)

Riešenie. Prirodzené číslo je deliteľné číslom 24 práve vtedy, keď je deliteľné súčasne (navzájom nesúdeliteľnými) číslami 3 a 8. Pre ciferný súčet prirodzeného čísla k zaveďme označenie $S(k)$. Číslo a_n je deliteľné tromi práve vtedy, keď je tromi deliteľný jeho ciferný súčet, teda číslo $S(1) + S(2) + \cdots + S(n)$. Zvyšok po delení tromi tohto súčtu závisí iba na zvyškoch (po delení tromi) jednotlivých sčítancov $S(k)$. Pretože po delení tromi dáva číslo $S(k)$ rovnaký zvyšok ako číslo k, dávajú čísla $S(1), S(4), S(7), \ldots$ zvyšok 1, čísla $S(2), S(5), S(8), \ldots$ zvyšok 2 a čísla $S(3), S(6), S(9), \ldots$ zvyšok 0. Preto napríklad číslo $S(a_{14})$, teda súčet $S(1) + S(2) + \cdots + S(14)$, dáva po delení tromi rovnaký zvyšok ako súčet

$$(1 + 2 + 0) + (1 + 2 + 0) + (1 + 2 + 0) + (1 + 2 + 0) + 1 + 2.$$

Podľa uzátvorkovaných trojíc ľahko vidíme, že tento súčet je deliteľný tromi. Pretože všeobecne súčet $S(3i - 2) + S(3i - 1) + S(3i)$ je deliteľný tromi pre každé prirodzené i, môžeme podobným spôsobom uzátvorkovať každý súčet

$$S(1) + S(2) + \cdots + S(n)$$

a zistiť, že jeho zvyšok po delení tromi je rovný 1, ak $n = 3k - 2$ a je rovný 0, ak $n = 3k - 1$ alebo $n = 3k$.

Čísla a_n teda budú deliteľné tromi práve vtedy, keď n bude tvaru $3k$ alebo $3k - 1$ $(k = 1, 2, \dots)$.

Teraz rozoberme, kedy budú čísla a_n naviac deliteľné ôsmimi. Prirodzené číslo je deliteľné ôsmimi práve vtedy, keď je deliteľné ôsmimi posledné trojčíslie jeho zápisu v desiatkovej sústave. Naše úvahy budú závisieť na počte číslic čísla n.

Pre aspoň trojciferné čísla n je a_n deliteľné ôsmimi práve vtedy, keď je deliteľné ôsmimi číslo n. Pretože sa zvyšky čísel a_n po delení tromi opakujú po troch a zvyšky po delení ôsmimi po ôsmich číslach a_n, budú sa zvyšky po delení číslom 24 opakovať po najmenšom spoločnom násobku týchto periód, teda po dvadsiatich štyroch. Pre trojciferné n ľahko zistíme, že podmienke v úlohe vyhovujú čísla tvaru $104+24k$ a $120 + 24k$ (n musí byť deliteľné ôsmimi a dávať zvyšok dva alebo nula po delení tromi). Do 10 000 máme 413 čísel tvaru $104 + 24k$ $(413 = \lfloor (10\,000 - 104)/24 \rfloor + 1)$ a 412 čísel tvaru $120 + 24k$.

Aby pri dvojcifernom n bolo číslo a_n deliteľné ôsmimi, musí byť deliteľné aj štyrmi. O deliteľnosti štyrmi rozhoduje posledné dvojčíslie, takže štyrmi budú deliteľné práve všetky tie a_n, pre ktoré je n deliteľné štyrmi. Číslo $n - 1$ je potom nepárne, teda aj a_{n-1} je číslo nepárne a číslo $100a_{n-1}$ dáva zvyšok štyri po delení ôsmimi. Potom číslo $a_n = 100a_{n-1} + n$ bude deliteľné ôsmimi práve vtedy, keď n bude tiež dávať zvyšok štyri po delení ôsmimi, bude teda tvaru $8k+4$. Spolu s podmienkou na deliteľnosť tromi dostávame, že vyhovujúce dvojciferné čísla n majú (rovnako ako vyššie) periódu 24 a sú tvaru $n = 12+24k$ a $n = 20+24k$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Po sto tak máme spolu $4+4 = 8$ čísel.

Pri jednocifernom n ľahko zistíme, že zo všetkých párnych čísel a_n vyhovuje iba $a_6 = 123\,456$.

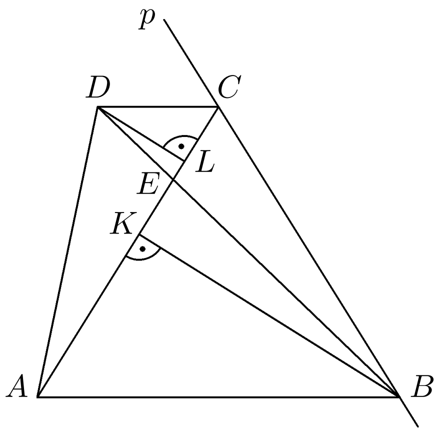
Celkom vyhovuje 834 čísel.

---

5. *Je daná priamka p a bod A, ktorý na nej neleží. Zostrojte lichobežník $ABCD$ s minimálnym obsahom a ramenom BC na priamke p tak, aby boli splnené rovnosti $|BC| = |AC|$ a $|BE| = 3|DE|$, kde E je priesečník uhlopriečok lichobežníka.*

(*P. Leischner*)

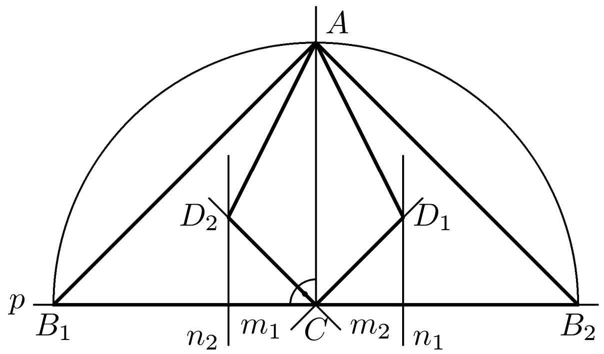
Riešenie. Predpokladajme, že $ABCD$ je hľadaný lichobežník a K, L sú päty kolmíc z vrcholov B, D na priamku AC (obr. 3). Z podobnosti pravouhlých trojuholníkov BKE a DLE vyplýva, že dĺžky strán BK a DL, t. j. odvesien v spomenutých trojuholníkoch, sú v rovnakom pomere ako dĺžky ich prepôn BE a DE, teda $3 : 1$. BK a DL sú však aj výškami v trojuholníkoch ABC a ACD, a to na spoločnú stranu AC. Obsahy týchto trojuholníkov sú teda tiež v pomere $3 : 1$, takže obsah lichobežníka $ABCD$ je rovný $4P/3$, kde P je obsah rovnoramenného trojuholníka ABC. Výška tohto trojuholníka z bodu A na stranu BC je daná (vzdialenosť bodu A od priamky p). Obsah trojuholníka ABC bude teda minimálny, keď bude minimálna dĺžka strany BC, a teda aj AC, t. j. keď úsečka AC bude kolmá na p.



Obr. 3

Konštrukcia. Najskôr zostrojíme bod C (päta kolmice z A na p). Vrchol B nájdeme ako priesečník priamky p s kružnicou $k(C, |AC|)$ (dve možnosti). Vrchol D je priesečníkom priamky m vedenej bodom C rovnobežne s AB a priamky n rovnobežnej s AC vo vzdialenosti $4|BC|/3$ od vrcholu B vnútri polroviny opačnej k ACB.

Záver. Úloha má dve riešenia súmerne združené podľa priamky $AC \perp p$ (obr. 4).



Obr. 4

---

6. *Určte všetky prirodzené čísla M deliteľné* 240, *pre ktoré má rovnica* $M = \mathrm{NSN}(x, y)$ *s neznámymi x, y práve* 1 001 *riešení v obore prirodzených čísel. (Symbol* $\mathrm{NSN}(x, y)$ *značí najmenší spoločný násobok čísel x a y.)* (*P. Černek*)

Riešenie. Najskôr ukážme, že pre číslo M s prvočíselným rozkladom $M = \prod_{i=1}^{n} p_i^{c_i}$ (p_i sú rôzne prvočísla) je počet riešení rovnice $\mathrm{NSN}(x, y) = M$ rovný $\prod_{i=1}^{n}(2c_i + 1)$. Naozaj, každé riešenie (x, y) danej rovnice má tú vlastnosť, že ľubovoľné prvočíslo p_i ($i = 1, \ldots, n$) delí aspoň jedno z čísel x a y (a to najviac s takým exponentom, s akým delí M) a žiadne iné prvočísla už ani x, ani y nedelia. Čísla x a y teda majú tvar

$$x = \prod_{i=1}^{n} p_i^{a_i}, \quad y = \prod_{i=1}^{n} p_i^{b_i}, \quad a_i, b_i \in \mathbb{N}_0, \quad \text{a naviac} \quad \max(a_i, b_i) = c_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Čísla x a y tak jednoznačne určujú n-tice čísel a_i a b_i a naopak, sú nimi jednoznačne určené. Všetky riešenia danej rovnice sú teda popísané dvojicami n-tíc prirodzených čísel takých, že na i-tej pozícii je v oboch n-ticiach číslo z množiny $\{0, \dots , c_i\}$ a aspoň v jednej z nich sa priamo rovná c_i. Takých n-tíc je $\prod_{i=1}^{n}(2c_i + 1)$, nakoľko dve n-tice čísel $(a_1, a_2, \dots , a_n)$ a $(b_1, b_2, \dots , b_n)$ môžeme považovať za n dvojíc čísel (a_1, b_1), (a_2, b_2), …, (a_n, b_n). Ľubovoľná dvojica (a_i, b_i) môže nezávisle nadobúdať $(2c_i + 1)$ rôznych hodnôt $(0, c_i)$, $(1, c_i)$, …, $(c_i - 1, c_i)$, (c_i, c_i), $(c_i, c_i - 1)$, …, $(c_i, 1)$, $(c_i, 0)$. Podľa kombinatorického pravidla súčinu dostávame vyššie uvedený počet.

Prvočíselný rozklad čísla 1 001 je $7 \cdot 11 \cdot 13$. Aby mala daná rovnica práve 1 001 riešení, musia exponenty c_i z prvočíselného rozkladu čísla M (obsahujúceho podľa zadania najmenej tri prvočísla, a to 2, 3 a 5) spĺňať rovnosť $\prod_{i=1}^{n}(2c_i + 1) = 7 \cdot 11 \cdot 13$. V prvočíselnom rozklade čísla M teda musia byť zastúpené práve tri prvočísla, a to s exponentmi $(7-1)/2 = 3$, $(11-1)/2 = 5$ a $(13-1)/2 = 6$. Pretože M má byť deliteľné číslom $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$, teda prvočíslami 2, 3 a 5 so zodpovedajúcimi exponentmi, sú jediné možné voľby pre M čísla $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^6$, $2^5 \cdot 3^6 \cdot 5^3$, $2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^3$, $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^5$.