**2003/2004**
**53. ročník MO** *Riešenia úloh školského kola kategórie B*

**1.** *Určte, koľko riešení má v obore reálnych čísel rovnica*

$$x = \lfloor x \rfloor + \frac{x}{2\,004},$$

*kde $\lfloor x \rfloor$ označuje dolnú celú časť čísla $x$, t. j. najväčšie celé číslo, ktoré je menšie alebo rovné ako $x$.* (J. Šimša)

**Riešenie.** Predpokladajme najskôr, že celé číslo $k = \lfloor x \rfloor$ poznáme, dosaďme ho do rovnice ako „parameter“ a získanú rovnicu vyriešme:

$$\begin{aligned} x &= k + \frac{x}{2\,004}, \\ 2\,004x &= 2\,004k + x, \\ x &= \frac{2\,004k}{2\,003}. \end{aligned}$$

Keď budeme do ostatného vzťahu dosadzovať jednotlivé celé čísla $k$, bude príslušné $x$ naozaj riešením skúmanej rovnice vtedy, keď sa jeho celá časť bude rovnať práve číslu $k$, teda keď budú platiť nerovnosti

$$k \leqq \frac{2\,004k}{2\,003} < k + 1.$$

Zistíme, ktoré celé $k$ vyhovujú obom nerovnostiam. Ľavá nerovnosť je ekvivalentná s nerovnosťou $k \geqq 0$, pravá nerovnosť s nerovnosťou $k < 2\,003$. Hľadané $k$ sú teda práve hodnoty $k \in \{0, 1, \dots, 2\,002\}$. Každá z nich určuje jediné riešenie $x$, takže všetkých riešení $x$ zadanej rovnice je práve $2\,003$. Dodajme, že vyhovujúce $k$ možno určiť aj úpravou odvodeného vzťahu na tvar

$$x = \frac{2\,004k}{2\,003} = k + \frac{k}{2\,003},$$

z ktorého vidno, že číslo $k$ je celou časťou čísla $x$ práve vtedy, keď platia nerovnosti

$$0 \leqq \frac{k}{2\,003} < 1, \quad \text{čiže} \quad 0 \leqq k < 2\,003.$$

**Iné riešenie.** Pretože pre každé reálne $x$ platí $\lfloor x \rfloor \leqq x \leqq \lfloor x \rfloor + 1$, porovnaním so zadanou rovnicou zistíme, že každé riešenie $x$ musí spĺňať nerovnosti

$$0 \leqq \frac{x}{2\,004} < 1, \quad \text{čiže} \quad 0 \leqq x < 2\,004.$$

Číslo $x$ spĺňajúce ostatné nerovnosti bude riešením skúmanej rovnice práve vtedy, keď hodnota $x - x/2\,004$ bude celočíselná. Pretože platí

$$x - \frac{x}{2\,004} = \frac{2\,003x}{2\,004},$$

dá sa ostatná podmienka vysloviť takto: číslo $2\,003x$ je celočíselným násobkom čísla $2\,004$. To vzhľadom na nerovnosti $0 \leqq 2\,003x < 2\,003 \cdot 2\,004$ znamená, že číslo $2\,003x$ sa rovná niektorému z čísel

$$0 \cdot 2\,004,\ 1 \cdot 2\,004,\ 2 \cdot 2\,004,\ \ldots,\ 2\,002 \cdot 2\,004,$$

takže skúmaná rovnica má práve $2\,003$ riešení

$$\frac{0 \cdot 2\,004}{2\,003}, \frac{1 \cdot 2\,004}{2\,003}, \frac{2 \cdot 2\,004}{2\,003}, \ldots, \frac{2\,002 \cdot 2\,004}{2\,003}.$$

---

**2.** *Uveďte príklad množiny* $\mathsf{M}$ *pozostávajúcej z dvojciferných čísel, ktorá má maximálny počet prvkov a pritom spĺňa obidve nasledujúce podmienky:*

*(i) Každé dve čísla patriace do množiny* $\mathsf{M}$ *sú nesúdeliteľné.*

*(ii) Ak zmeníme poradie číslic ľubovoľného čísla patriaceho do množiny* $\mathsf{M}$*, dostaneme opäť číslo patriace do množiny* $\mathsf{M}$*.*

(*J. Földes*)

**Riešenie.** Kvôli podmienke (i) môže byť v množine $\mathsf{M}$ najviac jedno z čísel $11, 22, 33, \ldots, 99$ zapísaných dvoma rovnakými číslicami, ktoré sú všetky deliteľné jedenástimi. Kvôli podmienke (ii) a deliteľnosti dvoma tam zasa nemôže byť žiadne číslo zapísané dvoma rôznymi párnymi číslicami. S jednou párnou číslicou môže byť v $\mathsf{M}$ najviac jedna dvojica čísel $\overline{ab}$, $\overline{ba}$.

Ostáva zistiť, koľko môže množina $\mathsf{M}$ obsahovať dvojíc čísel $\overline{ab}$, $\overline{ba}$ zapísaných dvoma rôznymi nepárnymi číslicami $a$ a $b$. Žiadne z týchto čísel nesmie byť deliteľné tromi (ak je číslo $\overline{ab}$ deliteľné tromi, je také aj číslo $\overline{ba}$), preto do úvahy prichádza iba sedem dvojíc takých čísel: $(13, 31)$, $(17, 71)$, $(19, 91)$, $(35, 53)$, $(37, 73)$, $(59, 95)$ a $(79, 97)$. Kvôli deliteľnosti piatimi, siedmimi a devätnástimi však môže byť v $\mathsf{M}$ iba jedna z dvojíc $(19, 91)$, $(35, 53)$ a $(59, 95)$, teda najviac päť zo všetkých siedmich vypísaných dvojíc.

Celkove zisťujeme, že množina $\mathsf{M}$ obsahuje najviac $1+2+2\cdot 5 = 13$ čísel. Príkladom trinásťprvkovej množiny je

$$\mathsf{M} = \{11, 23, 32, 13, 31, 17, 71, 35, 53, 37, 73, 79, 97\}.$$

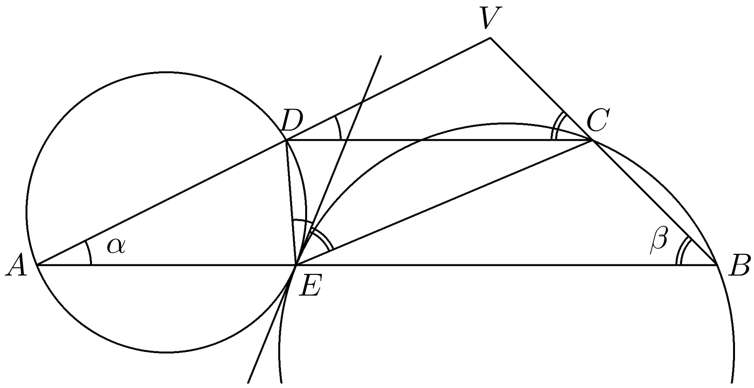
(Existujú aj iné príklady, naše úvahy však ukazujú, že každá trinásťprvková množina $\mathsf{M}$ musí obsahovať čísla 13, 31, 17, 71, 37, 73, 79, 97 a jednu z dvojíc $(35, 53)$ alebo $(59, 95)$; dvojica $(19, 91)$ je vylúčená, lebo číslo 91 je násobkom čísla 13.)

---

**3.** *Nech $ABCD$ je lichobežník s ostrými uhlami pri základni $AB$. Nech $E$ je taký bod základne $AB$, že kružnice opísané trojuholníkom $AED$ a $EBC$ sa dotýkajú zvonku. Dokážte, že bod $E$ leží na kružnici opísanej trojuholníku $CDV$, kde $V$ je priesečník priamok $AD$ a $BC$.* (*R. Horenský*)

**Riešenie.** Označme $\alpha$ a $\beta$ postupne vnútorné uhly pri vrcholoch $A$ a $B$ (obr. 1).

Bodom $E$ prechádza spoločná dotyčnica oboch uvažovaných kružníc, uhol $DEC$ je




Obr. 1

teda súčtom úsekových uhlov prislúchajúcich tetive $DE$ v jednej kružnici (s obvodovým uhlom $\alpha$) a tetive $EC$ v druhej kružnici (s obvodovým uhlom $\beta$). Jeho veľkosť je preto $\alpha+\beta$. A pretože veľkosť uhla $CVD$ je $180° - (\alpha+\beta)$, zisťujeme, že v štvoruholníku $CVDE$ sa uhly pri protiľahlých vrcholoch $E$ a $V$ dopĺňajú do $180°$. To, ako vieme, znamená, že $CVDE$ je tetivový štvoruholník, t. j. bod $E$ leží na kružnici opísanej trojuholníku $CDV$.