67. ročník Matematickej olympiády
2017/2018 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie B*

---

1. *Nájdite všetky mnohočleny tvaru ax^3+bx^2+cx+d, ktoré po delení dvojčlenom $2x^2+1$ dávajú zvyšok $x+2$ a po delení dvojčlenom x^2+2 dávajú zvyšok $2x+1$.*
(*Pavel Calábek*)

Riešenie. Pri delení (so zvyškom) mnohočlena tretieho stupňa mnohočlenom druhého stupňa je podiel rovný mnohočlenu prvého stupňa. Pritom jeho koeficient pri prvej mocnine je rovný podielu koeficientov pri najvyšších mocninách delenca a deliteľa, zatiaľ čo absolútny člen podielu je neznáma, ktorú pri daných dvoch deleniach označíme e, resp. g. Pre hľadaný mnohočlen tak má platiť

$$ax^3+bx^2+cx+d=(2x^2+1)\Big(\frac{a}{2}x+e\Big)+x+2=ax^3+2ex^2+\Big(\frac{a}{2}+1\Big)x+e+2,$$
$$ax^3+bx^2+cx+d=(x^2+2)(ax+g)+2x+1=ax^3+gx^2+(2a+2)x+2g+1.$$

Porovnaním koeficientov pravých strán predchádzajúcich dvoch rovností dostaneme

$$\begin{aligned}2e&=g,\\ \frac{a}{2}+1&=2a+2,\\ e+2&=2g+1.\end{aligned}$$

Riešením tejto sústavy je $a=-\frac{2}{3}$, $g=\frac{2}{3}$, $e=\frac{1}{3}$. Úlohe preto vyhovuje jediný mnohočlen

$$ax^3+bx^2+cx+d=-\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}.$$

Návodné a doplňajúce úlohy:

- N1. Určte podiel a zvyšok po delení mnohočlena $2x^3+x^2-3x+5$ dvojčlenom x^2-x. Túto skutočnosť zapíšte vo forme rovnosti bez použitia zlomkov. [$2x^3+x^2-3x+5=(x^2-x)(2x+3)+5$]
- N2. Určte všetky kvadratické trojčleny ax^2+bx+c, ktoré sú bezo zvyšku deliteľné ako dvojčlenom $x-2$, tak dvojčlenom $x+1$. [$ax^2-ax-2a$, $a\neq 0$]
- N3. Nájdite všetky trojčleny $p(x)=ax^2+bx+c$, ktoré dávajú po delení dvojčlenom $x+1$ zvyšok 2 a po delení dvojčlenom $x+2$ zvyšok 1, pričom $p(1)=61$. [61–C–I–1]
- N4. Nájdite všetky dvojice reálnych čísel (p,q) také, že mnohočlen x^2+px+q je deliteľom mnohočlena x^4+px^2+q. [56–B–I–5]

---

2. *Dokážte, že pre každé kladné reálne číslo t platia nerovnosti*

$$0\leqq\frac{t^2+1}{t+1}-\sqrt{t}\leqq|t-1|.$$

(*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Obe nerovnosti vynásobíme kladným číslom $t+1$, aby sme sa zbavili zlomkov,

$$0\leqq t^2+1-(t+1)\sqrt{t}\leqq|t-1|(t+1),$$

a pre jednoduchšie úpravy použijeme substitúciu $u = \sqrt{t} > 0$:

$$0 \leqq u^4 + 1 - (u^2+1)u \leqq |u^2 - 1|(u^2+1).$$

Zrejme platí $u^4 + 1 - (u^2+1)u = u^4 - u^3 - u + 1 = (u^3-1)(u-1)$ a $|u^2-1|(u^2+1) = |u^4 - 1|$, máme teda pre ľubovoľné kladné u dokázať nerovnosti

$$0 \leqq (u^3-1)(u-1) \leqq |u^4-1|.$$

Ľavá nerovnosť teraz vyplýva zo známeho rozkladu $u^3 - 1 = (u-1)(u^2+u+1)$, vďaka ktorému $(u^3-1)(u-1) = (u-1)^2(u^2+u+1)$ je súčinom dvoch nezáporných čísel. Pravú nerovnosť potom dostaneme pomocou dvoch zrejmých odhadov:

$$(u^3-1)(u-1) \leqq |u-1|(u^3+1) \leqq |u-1|(u^3+u^2+u+1) = |u^4-1|.$$

Tým sú obe nerovnosti dokázané.

Iné riešenie. Na dôkaz oboch nerovností niekoľkokrát využijeme zrejmú nerovnosť $2\sqrt{t} \leqq t+1$, ktorá platí pre ľubovoľné kladné t. Pre ľavú nerovnosť tak máme

$$\frac{t^2+1}{t+1} - \sqrt{t} \geqq \frac{t^2+1}{t+1} - \frac{t+1}{2} = \frac{t^2-2t+1}{2(t+1)} = \frac{(t-1)^2}{2(t+1)} \geqq 0$$

a pre pravú nerovnosť

$$\frac{t^2+1}{t+1} - \sqrt{t} = \frac{t^2+1-(t+1)\sqrt{t}}{t+1} \leqq \frac{t^2+1-2\sqrt{t}\sqrt{t}}{t+1} = \frac{|t-1|^2}{t+1} \leqq |t-1|,$$

pretože $|t-1| \leqq t+1$ podľa trojuholníkovej nerovnosti.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že pre každé kladné reálne číslo u platí

$$\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{u}} \geqq \sqrt{u} + \sqrt{2}.$$

[Využite to, že dvojčlen $\sqrt{u} - \sqrt{2}$ možno vyňať ako z rozdielu prvých, tak aj druhých sčítancov oboch strán. Úpravy na súčinový tvar môže uľahčiť, keď najskôr odstránime zlomky alebo použijeme vhodnú substitúciu, napr. $s = \sqrt{u}$ či $t = \sqrt{2/u}$.]

N2. Dokážte, že pre každé kladné reálne číslo a platí

$$\frac{1}{\sqrt{a}} > 2(\sqrt{a+1} - \sqrt{a}).$$

[Upravte nerovnosť na tvar $\frac{1}{2}(a + a + 1) > \sqrt{a(a+1)}$.]

N3. Dokážte, že pre každé reálne číslo x platí

$$1 + |x| \geqq \sqrt{|x^2-1|}.$$

[Využite odhad $1 + |x| \geqq \frac{1}{2}(|x-1| + |x+1|)$ a potom AG nerovnosť.]

N4. Dokážte, že pre každé dve reálne čísla x, y platí

$$1 + |x| + |y| + |xy| \geqq \sqrt{|x^2-1||y^2-1|}.$$

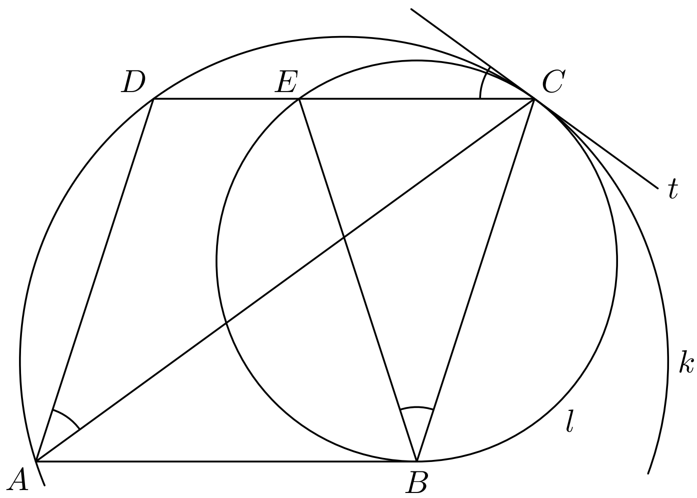
[Vysvetlite, prečo hodnota $1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$ leží medzi hodnotami druhých mocnín ľavej a pravej strany dokazovanej nerovnosti.]

3. *Nech $ABCD$ je kosoštvorec s kratšou uhlopriečkou BD a E vnútorný bod jeho strany CD, ktorý leží na kružnici opísanej trojuholníku ABD. Určte veľkosť jeho vnútorného uhla pri vrchole A, ak majú kružnice opísané trojuholníkom ACD a BCE práve jeden spoločný bod.* (Jaroslav Švrček)

Riešenie. Hľadanú veľkosť vnútorného uhla pri vrchole A uvažovaného kosoštvorca označme α. Ďalej označme k kružnicu opísanú trojuholníku ACD a l kružnicu opísanú trojuholníku BCE.

Z podmienok úlohy vyplýva, že $ABED$ je rovnoramenný lichobežník s kratšou základňou ED. Je teda $|EB| = |DA| = |CB|$, takže trojuholník BCE je rovnoramenný so základňou CE.

Bod C je podľa zadania jediným spoločným bodom kružníc k a l, preto v tomto bode existuje spoločná dotyčnica t oboch kružníc (obr. 1). Vzhľadom na to, že E je vnútorným bodom strany CD (tetivy kružnice k), majú vo vrchole C obe kružnice vnútorný dotyk. Pritom dotyčnica t zviera ako s tetivou CD kružnice k, tak s tetivou CE kružnice l ten istý úsekový uhol vyznačený na obrázku. To znamená, že zodpovedajúce obvodové uhly prislúchajúce uvedeným tetivám kružníc k a l sú zhodné, čiže $|\measuredangle CAD| = |\measuredangle CBE|$.



Obr. 1

Keďže uhlopriečka AC je osou vnútorného uhla pri vrchole A v kosoštvorci $ABCD$, je $|\measuredangle CAD| = \frac{1}{2}\alpha$, zatiaľ čo rovnoramenný trojuholník CEB má pri základni uhly veľkosti $|\measuredangle BEC| = |\measuredangle BCE| = |\measuredangle BAD| = \alpha$, takže $|\measuredangle CBE| = 180° - 2\alpha$. Spolu tak dostávame pre veľkosť uhla α rovnicu

$$180^\circ - 2\alpha = \frac{1}{2}\,\alpha,$$

ktorej riešením je $\alpha = 72°$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Trojuholníku ABC s vnútornými uhlami α, β, γ je opísaná kružnica. K tejto kružnici sú vedené dotyčnice v bodoch A, B, C. Určte veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ohraničeného týmito dotyčnicami. Rozoberte rôzne tvary trojuholníka ABC. [Napr.

pre ostrouhlý trojuholník s rôzne veľkými vnútornými uhlami majú uhly nového trojuholníka veľkosti $180^\circ - 2\alpha$, $180^\circ - 2\beta$, $180^\circ - 2\gamma$.]

N2. Dokážte, že rovnoramennému lichobežníku možno opísať kružnicu a žiadnemu inému lichobežníku kružnicu opísať nemožno.

N3. V rovnoramennom lichobežníku $ABCD$ platí $|BC| = |CD| = |DA|$ a $|\measuredangle DAB| = |\measuredangle ABC| = 36^\circ$. Na základni AB je daný bod K tak, že $|AK| = |AD|$. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom AKD a KBC majú vonkajší dotyk. [53–B–I–2]

N4. Nech $ABCD$ je lichobežník s ostrými uhlami pri základni AB. Nech E je taký bod základne AB, že kružnice opísané trojuholníkom AED a EBC sa dotýkajú zvonku. Dokážte, že bod E leží na kružnici opísanej trojuholníku CDV, kde V je priesečník priamok AD a BC. [53–B–S–3]

N5. Daný je rovnobežník $ABCD$ s tupým uhlom ABC. Na jeho uhlopriečke AC v polrovine BDC zvoľme bod P tak, aby platilo $|\measuredangle BPD| = |\measuredangle ABC|$. Dokážte, že priamka CD je dotyčnicou ku kružnici opísanej trojuholníku BCP práve vtedy, keď úsečky AB a BD sú zhodné. [59–A–II–2]

---

4. *Určte počet všetkých trojíc prirodzených čísel a, b, c, pre ktoré platí*

$$a + ab + abc + ac + c = 2017.$$

(*Patrik Bak*)

Riešenie. Ľavú stranu danej rovnice najskôr upravíme

$$\begin{aligned} a + ab + abc + ac + c &= a(1+b) + ac(1+b) + c = a(1+b)(1+c) + c = \\ &= a(1+b)(1+c) + (1+c) - 1 = (1+c)(a(1+b)+1) - 1, \end{aligned}$$

vďaka čomu dostaneme ekvivalentnú rovnicu

$$(1+c)(a(1+b)+1) = 2\,018.$$

Číslo 2 018 sa dá napísať ako súčin dvoch čísel dvoma spôsobmi: $1 \cdot 2\,008$ alebo $2 \cdot 1\,009$. Keďže je $1+c \geqq 2$ a $a(1+b)+1 \geqq 3$, môže byť jedine $1+c = 2$ a $a(1+b)+1 = 1\,009$, čiže $c = 1$ a $a(1+b) = 1\,008$. V každej vyhovujúcej trojici (a, b, c) je tak $c = 1$, a preto vlastne hľadáme počet dvojíc (a, b) spĺňajúcich rovnicu z konca predchádzajúcej vety.

Číslo $1\,008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$, ktoré sa má rovnať $a(1+b)$, má $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ rôznych deliteľov vrátane jednotky a seba. Keďže $1 + b \geqq 2$, nemôže byť $a = 1\,008$. Pre každý iný z 29 deliteľov a čísla 1 008 dostaneme jednu dvojicu riešenia (a, b).

Odpoveď. Hľadaný počet trojíc je rovný 29.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Určte počet deliteľov čísla 2 016. [$6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ deliteľov]

N2. Určte všetky dvojice prirodzených čísel a, b, pre ktoré platí $a + ab + b = 2\,017$. [$(a, b) = (1, 1\,008)$, $(a, b) = (1\,008, 1)$]

N3. Nájdite všetky dvojice nezáporných celých čísel a, b, pre ktoré platí $a^2 + b + 2 = a + b^2$. [59–C–S–3, $(a, b) = (1, 2)$, $(a, b) = (0, 2)$]

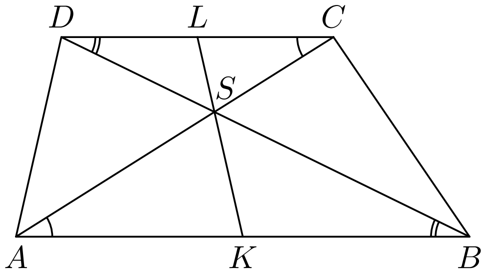
N4. Nájdite všetky trojice celých čísel x, y, z, pre ktoré platí

$$x + yz = 2\,005, \quad y + xz = 2\,006.$$

[54–C–S–1, $(x, y, z) = (669, 668, 2)$, $(x, y, z) = (2\,005, 2\,006, 0)$]

5. *Daný je lichobežník $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Uvažujme obe priamky, z ktorých každá delí daný lichobežník na dve časti s rovnakým obsahom a je pritom rovnobežná s jeho uhlopriečkou AC, resp. BD. Dokážte, že priesečník týchto dvoch priamok leží na úsečke, ktorá spája stredy oboch základní AB a CD.* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Najskôr ukážeme, že priesečník S uhlopriečok AC, BD leží na spojnici stredu K základne AB a stredu L základne CD. Zo zhodnosti vyznačených striedavých uhlov na obr. 2 vyplýva podobnosť trojuholníkov $ABS \sim CDS$ (veta *uu*), čo zaručuje podobnosť aj ich „polovíc“, trojuholníkov AKS a CLS (podľa vety *sus*, pretože v prv uvedenej podobnosti si zodpovedajú nielen strany AS a CS, ale aj prislúchajúce polovice strán AB a CD). Z toho dostávame zhodnosť uhlov ASK a CSL, na jednej priamke teda ležia nielen ich prvé, ale aj druhé ramená, čiže $S \in KL$, ako sme sľúbili ukázať.



Obr. 2

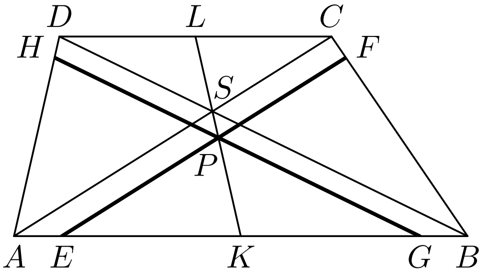
Predpokladajme, že $|AB| > |CD|$ (inak zmeníme označenie vrcholov). Z porovnania strán a výšok trojuholníkov pre ich obsahy dostávame

$$S_{ABC} = S_{ABD} > S_{CDA} = S_{CDB}.$$

Preto uvažovaná rovnobežka s AC pretína trojuholník ABC (a nie ACD), teda jeho strany AB a BC v bodoch, ktoré označíme postupne E a F. Keďže

$$S_{EBF} = \frac{1}{2} S_{ABCD} > \frac{1}{2} S_{ABC},$$

leží bod E na strane AB zaručene v jej „prvej polovici“ AK. Podobne skúmaná rovnobežka s BD pretína strany AB a AD v bodoch, ktoré označíme G a H, pričom bod G leží na strane AB medzi bodmi K a B (obr. 3). Priesečník P priamok EF a GH teda leží v trojuholníku ABS a podľa vety *uu* platí $\triangle ABS \sim \triangle EGP$.



Obr. 3

Ešte dokážeme, že bod K je stredom strany EG trojuholníka EGP. Potom už bude totiž jednoduché ukázať, že bod P leží na úsečke KS.

Všimnime si, že v podobnostiach $\triangle ABC \sim \triangle EBF$ a $\triangle ABD \sim \triangle AGH$ majú oba trojuholníky ABC a ABD rovnaký obsah. Obsahy trojuholníkov EBF a AGH sú tiež rovnaké (rovné polovici obsahu daného lichobežníka $ABCD$), takže obe podobnosti majú rovnaký koeficient, čiže $|EB|/|AB| = |AG|/|AB|$. Platí tak $|EB| = |AG|$, čiže $|EK| + |KB| = |AK| + |KG|$, odkiaľ vďaka $|KB| = |AK|$ vyplýva $|EK| = |KG|$.

Bod K je teda spoločným stredom úsečiek AB a EG. Z podobnosti trojuholníkov ABS a EGP tak vyplýva aj podobnosť trojuholníkov SAK a PEK (rovnakú úvahu sme urobili pre inú dvojicu trojuholníkov už na začiatku riešenia). Jej dôsledkom je zhodnosť uhlov ASK a EPK, z ktorej ale vyplýva $SK \parallel PK$, takže bod P musí nutne ležať na úsečke SK. Leží teda aj na spojnici KL, čo sme mali dokázať.

Poznámka. Riešitelia budú koeficienty podobností z posledného odseku riešenia zrejme vyjadrovať cez obsahy trojuholníkov vyjadrené vzorcami

$$S_{ABC} = S_{ABD} = \frac{av}{2}, \quad S_{EBF} = S_{AGH} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{(a+c)v}{4},$$

pričom a, c a v sú dĺžky základní a výšky daného lichobežníka.

Alebo sa dá pracovať so vzdialenosťami bodov od priamok a ukázať, že platí

$$\frac{d(P, AS)}{d(P, BS)} = \frac{d(K, AS)}{d(K, BS)}.$$

(Polpriamka SK je množinou všetkých tých bodov uhla ASB, ktoré majú od jeho ramien rovnaký pomer vzdialeností ako bod K.) Ak označíme k spoločný koeficient oboch podobností $\triangle ABC \sim \triangle EBF$ a $\triangle ABD \sim \triangle AGH$, dostaneme

$$\frac{d(P, AS)}{d(P, BS)} = \frac{d(B, AC) - d(B, EF)}{d(A, BD) - d(A, GH)} = \frac{(1-k)d(B, AC)}{(1-k)d(A, BD)} = \frac{d(B, AC)}{d(A, BD)},$$

avšak $d(B, AC) = 2d(K, AS)$ a $d(A, BD) = 2d(K, BS)$, čím je dôkaz ukončený.

NÁVODNÉ A DOPLŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Daný je lichobežník $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Dokážte, že štyri body, a to stredy základní lichobežníka, priesečník jeho uhlopriečok a priesečník priamok oboch ramien lichobežníka, ležia na jednej priamke.

N2. Daný je lichobežník $ABCD$ ($AB \parallel CD$), S označuje priesečník jeho uhlopriečok. Dokážte, že obsahy trojuholníkov BCS a ADS sú rovnaké.

N3. Je daný lichobežník $ABCD$. Stred základne AB označme P. Uvažujme rovnobežku so základňou AB, ktorá pretína úsečky AD, PD, PC, BC postupne v bodoch K, L, M, N.
   a) Dokážte, že $|KL| = |MN|$.
   b) Určte polohu priamky KL tak, aby platilo aj $|KL| = |LM|$.
   [60–C–I–6]

N4. Vnútri obdĺžnika $ABCD$ ležia body X a Y tak, že celý obdĺžnik je rozdelený na dva trojuholníky ADX, BCY s rovnakým obsahom a dva konvexné štvoruholníky $ABYX$ a $CDXY$ taktiež s rovnakým obsahom. Dokážte, že potom úsečka XY prechádza stredom obdĺžnika. [43–C–II–3]

N5. Na strane BC, resp. CD rovnobežníka $ABCD$ určte body E, resp. F tak, aby úsečky EF, BD boli rovnobežné a trojuholníky ABE, AEF a AFD mali rovnaké obsahy. [58–B–I–3]

6. *Nájdite najväčší možný počet čísel, ktoré možno vybrať z množiny* $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ *tak, aby medzi nimi neboli žiadne dve, ktoré sa líšia o 2 alebo o 5.* (*Pavel Calábek*)

Riešenie. Najskôr ukážeme, že z ľubovoľných siedmich po sebe idúcich čísel, označme ich

$$a,\ a+1,\ a+2,\ a+3,\ a+4,\ a+5,\ a+6,$$

možno požadovaným spôsobom vybrať nanajvýš tri čísla. Za tým účelom všetkých sedem čísel rozdelíme do troch množín

$$\mathsf{A} = \{a, a+2, a+5\}, \quad \mathsf{B} = \{a+1, a+3\}, \quad \mathsf{C} = \{a+4, a+6\}.$$

Keďže z množiny A môžeme vybrať nanajvýš dve čísla a z každej z množín B a C nanajvýš po jednom čísle, stačí len vylúčiť prípad, že z množiny A sú vybrané dve čísla (nutne $a+2$ a $a+5$) a súčasne z množín B a C je vybrané po jednom čísle. Vtedy kvôli číslu $a+2$ je z C nutne vybrané číslo $a+6$ a kvôli číslu $a+5$ je z B vybrané číslo $a+1$. Súčasný výber čísel $a+1$, $a+6$ však možný nie je.

Pomocou dokázanej vlastnosti teraz ľahko vysvetlíme, prečo zo všetkých 100 daných čísel od 1 po 100, ktoré máme podľa zadania k dispozícii, nemožno požadovaným spôsobom vybrať viac ako 44 čísel. Za tým účelom zo všetkých 100 čísel zostavíme 14 disjunktných sedmíc po sebe idúcich čísel

$$\{1,2,3,4,5,6,7\},\ \{8,9,10,11,12,13,14\},\ \dots,\ \{92,93,94,95,96,97,98\}, \qquad (1)$$

do ktorých sme nezahrnuli iba dve najväčšie čísla 99 a 100. Ako sme ukázali, z každej vypísanej sedmice možno vybrať nanajvýš tri čísla, preto počet všetkých vybraných čísel naozaj nikdy neprevýši číslo $14 \cdot 3 + 2 = 44$.

V poslednej časti riešenia ukážeme, že výber 44 čísel je možný a že je pritom jediný (aj keď to dokázať zadanie úlohy nevyžaduje). Predpokladajme teda, že máme ľubovoľný vyhovujúci výber 44 čísel. Podľa predchádzajúceho odseku vieme, že medzi vybranými musia byť dvojice čísel 99 a 100. Ak pozmeníme zostavu 14 disjunktných sedmíc na

$$\{3,4,5,6,7,8,9\},\ \{10,11,12,13,14,15,16\},\ \dots,\ \{94,95,96,97,98,99,100\}, \qquad (2)$$

dôjdeme k záveru, že medzi vybranými musia tiež byť čísla 1 a 2. Je jasné, že použitím iných zostáv 14 sedmíc, zložených vždy z niekoľkých prvých sedmíc z (1) a niekoľkých posledných sedmíc z (2), odvodíme, že medzi vybranými číslami musia byť aj dvojice 8 a 9, 15 a 16, …, 92 a 93, spolu teda všetkých 15 dvojíc susedných čísel, ktoré po delení siedmimi dávajú zvyšky 1 a 2.

Čo možno ďalej usúdiť o zvyšných $44-30 = 14$ vybraných číslach? Vďaka dokázanej vlastnosti vieme, že to musia byť čísla po jednom vybrané zo 14 sedmíc (1); keďže v každej z týchto sedmíc sú určite vybrané dve najmenšie čísla, tretie vybrané číslo zrejme musí byť to, ktoré je v sedmici piate najmenšie.

Dokázali sme, že každý vyhovujúci výber 44 čísel musí vyzerať takto:

$$\{1,2,5\} \cup \{8,9,12\} \cup \{15,16,19\} \cup \ldots \cup \{92,93,96\} \cup \{99,100\}.$$

Že tento výber, zložený zo 14 trojíc a jednej dvojice, je naozaj vyhovujúci, vysvetlíme ľahko: dve čísla z rovnakej skupiny sa líšia o 1, 3 alebo 4, rozdiel každých dvoch čísel ležiacich v susedných skupinách je jedno z čísel 3, 4, 6, 7, 8, 10 či 11; čísla z nesusedných skupín majú rozdiely aspoň 10.

Návodné a doplňujúce úlohy:

N1. Daná je množina čísel $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Nájdite všetky jej podmnožiny s najväčším možným počtom prvkov, aby medzi nimi neboli žiadne dve čísla, ktoré sa líšia o 2 alebo o 5. [$\{1,2,5,8,9\}$, $\{2,3,6,9,10\}$]

N2. Zistite, pre ktoré prirodzené čísla $n \geqq 2$ je možné z množiny $\{1,2,\ldots,n-1\}$ vybrať navzájom rôzne párne čísla tak, aby ich súčet bol deliteľný číslom n. [54–C–I–2]

N3. Pre ktoré prirodzené čísla n možno z množiny $\{n, n+1, n+2, \ldots, n^2\}$ vybrať štyri navzájom rôzne čísla a, b, c, d tak, aby platilo $ab = cd$? [54–C–S–2]

N4. Z množiny $\{1,2,3,\ldots,99\}$ vyberte čo najväčší počet čísel tak, aby súčet žiadnych dvoch vybraných čísel nebol násobkom jedenástich. [58–C–I–5]

N5. Z množiny $\{1,2,3,\ldots,99\}$ je vybraných niekoľko rôznych čísel tak, že súčet žiadnych troch z nich nie je násobkom deviatich.

a) Dokážte, že medzi vybranými číslami sú najviac štyri deliteľné tromi.

b) Ukážte, že vybraných čísel môže byť 26.

[58–C–II–3]

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný, Ján Mazák

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017