67. ročník Matematickej olympiády
2017/2018 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie C*

1. *Nájdite najmenšie štvorciferné číslo $\overline{abcd}$ také, že rozdiel*

$$\left(\overline{ab}\right)^2 - \left(\overline{cd}\right)^2$$

je trojciferné číslo zapísané tromi rovnakými ciframi.

(*Patrik Bak, Mária Dományová*)

Riešenie. Hľadajme najskôr riešenie rovnice pre najmenšie trojciferné číslo s rovnakými ciframi, ktoré rovno rozložíme na súčin prvočísel:

$$\overline{ab}^2 - \overline{cd}^2 = \left(\overline{ab} + \overline{cd}\right)\left(\overline{ab} - \overline{cd}\right) = 111 = 37 \cdot 3. \tag{1}$$

Prvá zátvorka je kladná a súčin oboch zátvoriek je kladné číslo, preto sú obe zátvorky kladné. Číslo $\overline{abcd}$ je štvorciferné, teda $a \geqq 1$, takže $\overline{ab} \geqq 10$, a teda $\overline{ab}+\overline{cd} \geqq 10$. Keďže 37 a 3 sú prvočísla, máme iba dve možnosti v rozklade rovnice (1): buď $\overline{ab} + \overline{cd} = 37$ a $\overline{ab} - \overline{cd} = 3$, alebo $\overline{ab} + \overline{cd} = 111$ a $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$.

V prvom prípade dostávame riešením sústavy $\overline{ab} + \overline{cd} = 37$, $\overline{ab} - \overline{cd} = 3$ hodnoty $\overline{ab} = 20$ a $\overline{cd} = 17$, takže $\overline{abcd} = 2\,017$. V druhom prípade dostaneme obdobným spôsobom $\overline{abcd} = 5\,655$.

Teraz ukážeme, že žiadne číslo menšie ako $2\,017$ nemá požadovanú vlastnosť. Pripusťme, že také číslo $\overline{abcd} < 2\,017$ existuje. V tom prípade musí byť $\overline{ab} \leqq 20$, a teda $\overline{ab}^2 - \overline{cd}^2 \leqq 20^2 = 400 < 444$, takže rozdiel $\overline{ab}^2 - \overline{cd}^2$ je rovný jednému z čísel 111, 222 alebo 333. Prvú možnosť sme už rozobrali úplným riešením rovnice (1), rozoberme zvyšné dve možnosti.

Rovnica

$$\left(\overline{ab} + \overline{cd}\right)\left(\overline{ab} - \overline{cd}\right) = 222 = 2 \cdot 3 \cdot 37$$

vedie (s prihliadnutím na $\overline{ab} \geqq 10$) k možnostiam[1] $\left(\overline{ab} + \overline{cd}, \overline{ab} - \overline{cd}\right) \in \{(37, 6), (74, 3), (111, 2), (222, 1)\}$. Vyriešením štyroch prislúchajúcich sústav o dvoch neznámych dostaneme

$$\left(\overline{ab}, \overline{cd}\right) \in \left\{\left(\tfrac{43}{2}, \tfrac{31}{2}\right), \left(\tfrac{77}{2}, \tfrac{71}{2}\right), \left(\tfrac{113}{2}, \tfrac{109}{2}\right), \left(\tfrac{223}{2}, \tfrac{221}{2}\right)\right\},$$

čo nedáva žiadne celočíselné riešenie.

Nakoniec rovnica

$$\left(\overline{ab} + \overline{cd}\right)\left(\overline{ab} - \overline{cd}\right) = 333 = 3 \cdot 3 \cdot 37$$

vedie na možnosti $\left(\overline{ab} + \overline{cd}, \overline{ab} - \overline{cd}\right) \in \{(37, 9), (111, 3), (333, 1)\}$. Vyriešením troch prislúchajúcich sústav dostaneme

$$\left(\overline{ab}, \overline{cd}\right) \in \{(23, 14), (57, 54), (166, 165)\},$$

[1] Možnosť $(\overline{ab} + \overline{cd})(\overline{ab} - \overline{cd}) = 222$ možno vylúčiť hneď pozorovaním, že obe zátvorky majú rovnakú paritu (rozdiel medzi nimi je párne číslo), a preto ich súčin nemôže byť párne číslo 222, ktoré totiž nie je deliteľné štyrmi.

pričom ani v jednom prípade nevychádza $\overline{ab} \leqq 20$.

Odpoveď. Riešením úlohy je číslo 2 017.

Iné riešenie. Budeme postupovať podobne ako v predchádzajúcom riešení, len lepšie využijeme to, že 111 je deliteľné prvočíslom 37. Riešme teda rovnicu

$$(\overline{ab} - \overline{cd})(\overline{ab} + \overline{cd}) = 3 \cdot 37 \cdot k,$$

pričom k je nejaká nenulová cifra.

Hľadáme prirodzené čísla l a m také, že $0 < l < m$ a $l \cdot m = 3 \cdot 37 \cdot k$, a pre ne potom vyriešime sústavu $\overline{ab} - \overline{cd} = l$, $\overline{ab} + \overline{cd} = m$. Pritom zrejme platí $\overline{ab} = \frac{1}{2}(l + m)$, a keďže už hľadáme iba číslo $\overline{abcd}$ menšie ako 2 017, môžeme predpokladať, že $\overline{ab} \leqq 20$, čiže $l + m \leqq 40$.

Keďže súčin lm je deliteľný prvočíslom 37, musí byť jedno z čísel l, m deliteľné 37. Keďže je však $l + m \leqq 40$ a $l < m$, musí byť $m = 37$ a $l \leqq 3$, a teda $k = 1$, čo je prípad, ktorý sme už rozobrali. Žiadne vyhovujúce číslo menšie ako 2 017 tak neexistuje.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nájdite všetky trojciferné čísla $\overline{abc}$ také, že $\overline{ab} \cdot c$ je trojciferné číslo s tromi rovnakými ciframi. [373, 376, 379, 743, 746, 749]

N2. Nájdite najväčšie štvorciferné číslo $\overline{abcd}$ také, že $\overline{ab} \cdot \overline{cd}$ je trojciferné číslo s tromi rovnakými ciframi. [7 412]

D1. Nájdite všetky štvorciferné čísla $\overline{abcd}$, také, že $\overline{ab}^2 - \overline{cd}^2$ je štvorciferné číslo so štyrmi rovnakými ciframi. [5 645, 6 734, 7 823, 8 912]

D2. Nájdite všetky štvorciferné čísla $\overline{abcd}$, také že $\overline{ab}^2 - \overline{cd}^2$ je trojciferné číslo s tromi rovnakými ciframi. [2 017, 2 314, 2 611, 2 908, 3 205, 4 034, 4 331, 5 655, 5 754, 5 853, 5 952, 6 051, 7 771, 9 491]

---

2. *Určte najväčší možný počet neprázdnych po dvoch disjunktných množín s rovnakými súčtami prvkov, na ktoré možno rozdeliť množinu*

a) $\{1, 2, ..., 2017\}$,

b) $\{1, 2, ..., 2018\}$.

Ak je množina tvorená jedným číslom, považujeme ho za súčet jej prvkov.

(*Patrik Bak*)

Riešenie. Pozrime sa najskôr na množiny s najmenším možným počtom prvkov; jednoprvkovú množinu môžeme zrejme v rozdelení mať nanajvýš jednu – v opačnom prípade by tie dve jednoprvkové množiny nemali rovnaký súčet prvkov. Ostatné množiny sú teda aspoň dvojprvkové.

V časti a) vezmime ako jednoprvkovú množinu tú s najväčším číslom, teda $\{2\,017\}$. Všetky ostatné množiny potom budú aspoň dvojprvkové a mali by mať súčet prvkov 2 017: zvyšné čísla $1, 2, \ldots, 2\,016$ už ľahko rozdelíme na 1 008 vyhovujúcich množín $\{1, 2\,016\}$, $\{2, 2\,015\}$, $\ldots$, $\{1\,008, 1\,009\}$ so žiadaným súčtom prvkov 2 017.

Podľa práve uvedeného postupu dokážeme rozdeliť aj množinu $\{1, 2, \ldots, 2\,018\}$ na 1 009 množín $\{1, 2\,018\}$, $\{2, 2\,017\}$, $\ldots$, $\{1\,009, 1\,010\}$ s rovnakým súčtom prvkov rovným 2 019.

Teraz ešte ukážeme, prečo ani v jednej z častí a) či b) nemôžeme vytvoriť viac ako 1 009 množín. Predpokladajme, že by tých množín bolo aspoň 1 010. Keďže nanajvýš jedna z nich môže byť jednoprvková a ostatné sú aspoň dvojprvkové, bol by počet všetkých ich prvkov aspoň $1 + 1\,009 \cdot 2 = 2\,019$, zatiaľ čo my máme k dispozícii iba $2\,017$ prvkov v časti a) a $2\,018$ prvkov v časti b).

Poznámka. Súčet všetkých čísel v časti a) je $1\,009 \cdot 2\,017$ a v časti b) $1\,009 \cdot 2\,019$. Ak už uhádneme, že množín má byť $1\,009$, tak zrejme súčet prvkov v jednotlivých množinách musí byť $2\,017$ v časti a) a $2\,019$ v časti b).

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nájdite vzorec pre súčet čísel $1 + 2 + \cdots + n$. $[n(n+1)/2]$

N2. Zdôvodnite, že ak rozdelíme $2\,000$ holubov do $1\,001$ klietok, bude nejaká klietka buď prázdna, alebo v nej bude iba jeden holub. [Ak by v každej klietke boli aspoň dva holuby, bolo by holubov spolu aspoň $2 \cdot 1\,001 = 2\,002$, čo dáva spor.]

D1. Na koľko najviac neprázdnych množín s rovnakým súčtom je možné rozdeliť množinu $\{1, 2, \dots, n\}$? [$\lfloor (n+1)/2 \rfloor$, t. j. $(n+1)/2$, ak je n nepárne, a $n/2$, ak je n párne]

D2. Na koľko najviac neprázdnych množín so súčtami prvkov deliteľnými tromi je možné rozdeliť množinu $\{1, 2, \dots, 3m\}$? [Príkladom rozdelenia na $2m$ množín je m dvojprvkových množín $\{3k-2, 3k-1\}$ a m jednoprvkových množín $\{3k\}$. Vysvetlíme, prečo rozdelenie na viac ako $2m$ množín neexistuje. Pri ľubovoľnom vyhovujúcom rozdelení môžeme od každej viacprvkovej množiny obsahujúcej násobok troch toto číslo „odtrhnúť“ ako jednoprvkovú množinu, a vytvoriť tak početnejšie rozdelenie. Preto pri hľadaní dotyčného maxima môžeme uvažovať iba rozdelenia, v ktorých všetkých m násobkov troch tvorí jednoprvkové množiny. Každé z ostatných $2m$ čísel potom leží v nejakej množine s najmenej dvoma prvkami, takže viacprvkových množín je nanajvýš $(3m - m) : 2 = m$.]

D3. Nájdite vzorec pre súčet čísel $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$. $[n^2]$

---

3. *Daný je pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB, v ktorom D označuje pätu výšky z vrcholu C. V polrovine s hraničnou priamkou AB a vnútorným bodom C uvažujme body E, F také, že uhly EBA, FAB sú pravé, $|BE| = |BD|$ a $|AF| = |AD|$. Dokážte, že priamky AE a BF sa pretínajú na úsečke CD.* (Jaroslav Švrček)

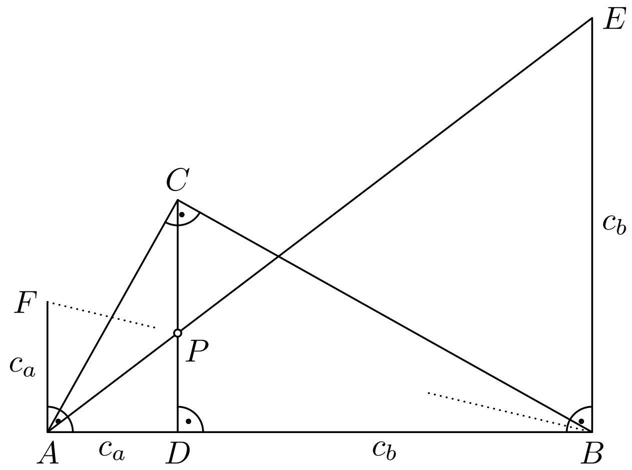
Riešenie. Označme $c_a = |AF| = |AD|$ a $c_b = |BE| = |BD|$. Priesečník priamky AE s CD označme P. Z podobnosti pravouhlých trojuholníkov ABE a ADP vyplýva (obr. 1)

$$\frac{|DP|}{|BE|} = \frac{|AD|}{|AB|}, \quad \text{čiže} \quad |DP| = \frac{|AD| \cdot |BE|}{|AB|} = \frac{c_a c_b}{c_a + c_b}.$$

Ak označíme analogicky Q priesečník priamky BF s CD, vyjde z podobnosti pravouhlých trojuholníkov ABF a DBQ

$$|DQ| = \frac{c_a c_b}{c_a + c_b},$$

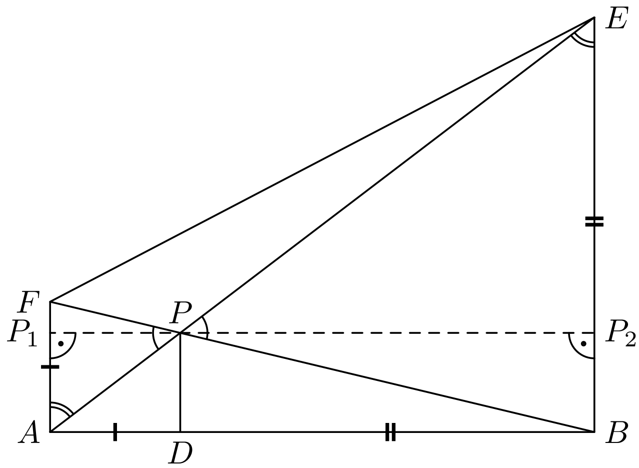
čo znamená, že $|DP| = |DQ|$, a teda $P = Q$, lebo oba body ležia na polpriamke DC.



Obr. 1

Ešte dokážeme, že bod P leží *vnútri* úsečky CD, t. j. $|PD| < |CD|$. Z konštrukcie bodu P vyplýva, že $|PD| < |EB| = c_b$ a $|PD| < |FA| = c_a$. Navyše pre odvesny oboch podobných pravouhlých trojuholníkov ADC a CDB zrejme platí buď $c_a \leqq |CD| \leqq c_b$ (keď pre odvesny trojuholníka ADC platí $c_a = |AD| \leqq |CD|$, tak platí aj $|CD| \leqq$ $\leqq |DB| = c_b$ v trojuholníku CDB), alebo $c_b \leqq |CD| \leqq c_a$ (v opačnom prípade). V každom prípade však je $|PD| < \min(c_a, c_b) \leqq |CD|$.

Iné riešenie. Uvažovaný štvoruholník $ABEF$ je zrejme pravouhlý lichobežník alebo pravouholník. Označme P priesečník uhlopriečok AE a BF a P_1, P_2 jeho kolmé priemety na strany AF, resp. BE (obr. 2). Ukážeme, že bod P leží na kolmici na stranu AB vedenej bodom D (pätou výšky pôvodného trojuholníka ABC).



Obr. 2

Keďže AE je priečka rovnobežiek $AF \parallel BE$, sú trojuholníky AFP a EBP podobné podľa vety *uu*, pričom pre ich výšky zo spoločného vrcholu P vďaka tomu platí

$$\frac{|PP_1|}{|PP_2|} = \frac{|AF|}{|BE|} = \frac{|AD|}{|BD|}.$$

Bod P teda delí úsečku P_1P_2 rovnobežnú s AB v rovnakom pomere, v akom bod D delí úsečku AB. Preto $PD \parallel AF \parallel BE$, a teda $PD \perp AB$, ako sme sľúbili ukázať.

Ešte si uvedomme, že vďaka rovnostiam $|BE| = |BD|$ a $|AF| = |AD|$ platia pre odvesny pravouhlých trojuholníkov ABF a ABE nerovnosti $|BE| < |AB|$ a $|AF| < < |AB|$, takže každý z uhlov BAE i ABF je menší ako $45°$.

Ak sa vrátime k zadaniu úlohy, vidíme, že priamky AE a BF sa pretínajú na polpriamke DC. A keďže daný trojuholník ABC je pravouhlý, má jeden z jeho uhlov BAC, ABC veľkosť aspoň $45°$ (ich súčet je $90°$). Bod P teda musí určite ležať vnútri jedného z uhlov BAC či ABC, teda dokonca *vnútri* úsečky DC, čo sme chceli dokázať.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB označme D pätu výšky z vrcholu C. Dokážte, že platia tzv. Euklidove vety $|CD|^2 = |AD| \cdot |BD|$, $|AC|^2 = |AB| \cdot |AD|$ a $|BC|^2 = |AB| \cdot |BD|$.

N2. Daný je trojuholník ABC, v ktorom D označuje pätu výšky z vrcholu C. V polrovine ABC uvažujme body F, E také, že uhly EBA, FAB sú pravé, $|BE| = |BD|$ a $|AF| = = |AD|$. Dokážte, že priamky AE a BF sa pretínajú na priamke CD. [Využite podobnosť pravouhlých trojuholníkov.]

D1. Daný je pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB, v ktorom D označuje pätu výšky z vrcholu C. V polrovine ABC uvažujme body F, E také, že uhly EBA, FAB sú pravé, $|BE| = |BD|$ a $|AF| = |AD|$. Dokážte, že sa priamky AE a BF pretínajú na úsečke DG, pričom G je stred úsečky CD. [Uvedomte si, že dĺžka jedného z úsekov c_a, c_b je nanajvýš rovná polovici dĺžky prepony AB.]

D2. Daný je pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB, v ktorom D označuje pätu výšky z vrcholu C. V polrovine ABC uvažujme body F, E také, že uhly EBA, FAB sú pravé, $|BE| = |BD|$ a $|AF| = |AD|$. Dokážte, že priamka EF pretína úsečku CD. [Priamka EF pretína polpriamku DC vo vzdialenosti $2c_ac_b/(c_a + c_b)$ od bodu D. Alebo si uvedomte, že priesečník uhlopriečok lichobežníka či pravouholníka $BEFA$ rozpoľuje zodpovedajúcu priečku, a použite D1.]

---

4. *Určte najväčšie celé číslo n, pri ktorom možno štvorcovú tabuľku $n \times n$ zaplniť prirodzenými číslami od 1 po n^2 tak, aby v každej jej štvorcovej časti 3×3 bola zapísaná aspoň jedna druhá mocnina celého čísla.* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Ľahko sa nám podarí požadovaným spôsobom zaplniť tabuľku 11×11 – stačí z 11 druhých mocnín celých čísel $1^2, 2^2, \ldots, 11^2$ vybrať deväť a umiestniť ich na deväť políčok tabuľky so súradnicami

$$(3,3),\ (3,6),\ (3,9),\quad (6,3),\ (6,6),\ (6,9),\quad (9,3),\ (9,6),\ (9,9)$$

a ostatnými číslami zaplniť zvyšné políčka akokoľvek. Keďže v každej časti 3×3 danej tabuľky je jedno z uvedených deviatich políčok, číslo $n = 11$ má požadovanú vlastnosť.

Ukážeme, že úlohe nevyhovuje žiadne $n \geqq 12$. Pre ľubovoľné $n \geqq 12$ označme k celočíselný podiel čísla n po delení tromi so zvyškom, čiže $3k \leqq n \leqq 3k + 2$ a $k \geqq 4$. V tabuľke $n \times n$ tak nájdeme k^2 neprekrývajúcich sa (disjunktných) štvorcov 3×3, k dispozícii však máme iba n druhých mocnín celých čísel $1^2, 2^2, \ldots, n^2$, pričom zrejme platí

$$n \leqq 3k + 2 < 4k \leqq k^2.$$

Pre $n \geqq 12$ tak danú tabuľku nedokážeme požadovaným spôsobom vyplniť.

Odpoveď. Hľadané najväčšie n je rovné 11.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré možno štvorcovú tabuľku $n \times n$ zaplniť prirodzenými číslami od 1 do n^2 tak, aby v každom riadku aj v každom stĺpci bola zapísaná aspoň jedna druhá mocnina celého čísla. [Ide to pre každé n – štvorce $1^2, 2^2, \ldots, n^2$ zapíšeme na uhlopriečku.]

N2. Určte najväčšie celé číslo n, pri ktorom je možné štvorcovú tabuľku $n \times n$ zaplniť prirodzenými číslami od 1 do n^2 tak, aby v každej jej štvorcovej časti 2×2 bola zapísaná aspoň jedna druhá mocnina celého čísla. [$n = 5$]

D1. Do štvorcovej tabuľky 11×11 sme vpísali prirodzené čísla $1, 2, \ldots, 121$ postupne po riadkoch zľava doprava a zhora nadol. Štvorcovou doštičkou 4×4 sme všetkými možnými spôsobmi zakryli práve 16 políčok. Koľkokrát bol súčet zakrytých 16 čísel druhou mocninou celého čísla? [65–B–I–2]

D2. Štvorcovú tabuľku 6×6 zaplníme všetkými celými číslami od 1 do 36.
   a) Uveďte príklad takého zaplnenia tabuľky, že súčet každých dvoch čísel v rovnakom riadku či v rovnakom stĺpci je väčší ako 11.
   b) Dokážte, že pri ľubovoľnom zaplnení tabuľky sa v niektorom riadku alebo stĺpci nájdu dve čísla, ktorých súčet neprevyšuje 12.

[66–C–II–2]

---

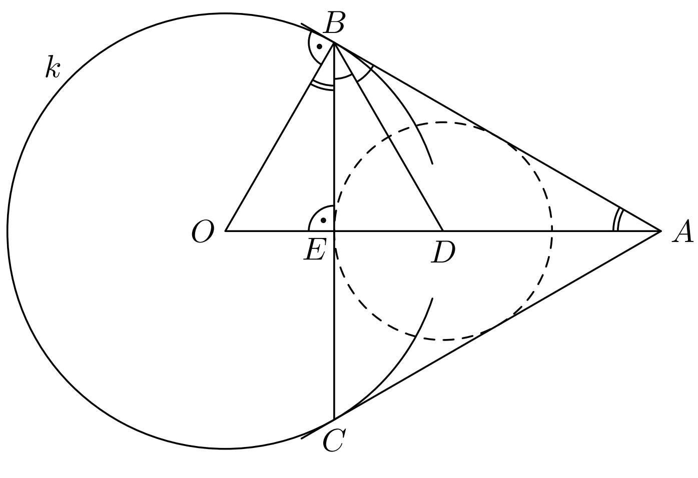
5. *Daná je kružnica $k(O, r)$ a bod A, pričom $|AO| = d > r$. Dotyčnice z bodu A sa dotýkajú kružnice k v bodoch B, C. Trojuholníku ABC je vpísaná kružnica. Vyjadrite jej polomer ϱ pomocou daných dĺžok d a r.* (Šárka Gergelitsová)

Riešenie. Ukážeme najskôr, že stred D kružnice vpísanej trojuholníku ABC leží na danej kružnici k.

Zo súmernosti dotyčníc AB, AC kružnice k podľa osi OA jej tetivy BC vyplýva, že trojuholník ABC je rovnoramenný a stred D jeho vpísanej kružnice leží na spojnici hlavného vrcholu A a stredu E základne BC, pričom DE je jej polomer (obr. 3). Keďže stred D leží aj na osi uhla ABC, sú vyznačené uhly DBA a DBE zhodné. Zhodné sú aj vyznačené uhly DAB a EBO, lebo oba dopĺňajú ten istý uhol AOB do $90°$. Pre vonkajší uhol ODB trojuholníka DAB tak platí

$$|\measuredangle ODB| = |\measuredangle DBA| + |\measuredangle DAB| = |\measuredangle DBE| + |\measuredangle EBO| = |\measuredangle DBO|,$$

takže trojuholník OBD je rovnoramenný so základňou BD, a preto $|OD| = |OB| = r$. Bod D tak naozaj leží na kružnici k, takže $|OE| = |OD| - |DE| = r - \varrho$.



Obr. 3

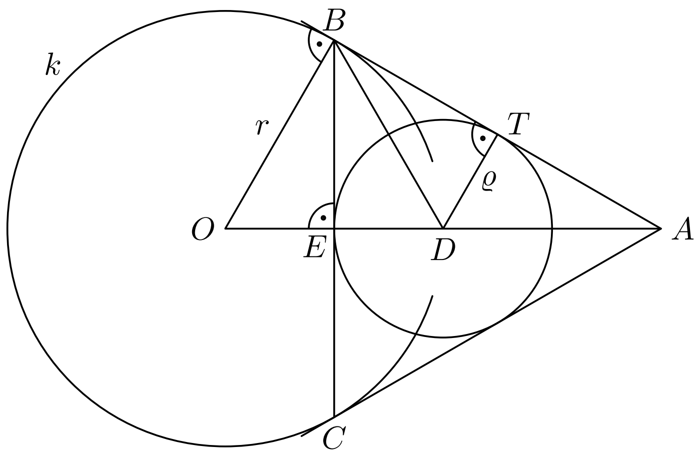
Teraz z podobnosti trojuholníkov BOE a AOB zaručenej vetou uu dostaneme

$$\frac{r-\varrho}{r} = \frac{|OE|}{|OB|} = \frac{|OB|}{|OA|} = \frac{r}{d}, \quad \text{čiže} \quad \frac{r^2}{d} = r - \varrho,$$

teda

$$\varrho = r - \frac{r^2}{d} = \frac{rd - r^2}{d} = \frac{r(d-r)}{d}.$$

Iné riešenie. Podobne ako v prvom riešení si uvedomíme, že body A, D, O ležia na jednej priamke, a to, že bod E je pätou výšky z vrcholu B v trojuholníku ABO. Označme navyše T pätu kolmice z bodu D na AB, čo je zároveň bod dotyku kružnice



Obr. 4

vpísanej trojuholníku ABC (obr. 4), a keďže priamky BA a BC sú jej dotyčnice, je $|BT| = |BE|$. Dĺžku $|BE|$ určíme z dvojakého vyjadrenia obsahu trojuholníka ABO:

$$2 \cdot S_{ABO} = |AO| \cdot |BE| = |AB| \cdot |OB|,$$

takže

$$|BT| = |BE| = \frac{|AB|r}{d}. \tag{1}$$

Na výpočet polomeru ϱ nakoniec použijeme podobnosť pravouhlých trojuholníkov ABO a ATD a vyjadrenie (1):

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{|DT|}{|OB|} = \frac{|AT|}{|AB|} = \frac{|AB| - |BT|}{|AB|} = 1 - \frac{|BT|}{|AB|} = 1 - \frac{r}{d},$$

odkiaľ

$$\varrho = r\left(1 - \frac{r}{d}\right) = \frac{r(d-r)}{d}.$$

Návodné a doplňujúce úlohy:

N1. Daná je kružnica $k(O,r)$ a bod A, pričom $|AO| = d > r$. Dotyčnice z bodu A sa dotýkajú kružnice k v bodoch B, C. Prechádza kružnica opísaná trojuholníku BCO bodom A? [Áno, je to Tálesova kružnica nad úsečkou AO.]

N2. Daná je kružnica $k(O,r)$ a bod A, pričom $|AO| = d > r$. Dotyčnice z bodu A sa dotýkajú kružnice k v bodoch B, C. Trojuholníku ABC je pripísaná kružnica ku strane BC. Leží jej stred na kružnici k? [Áno, označme $|\measuredangle BAC| = \alpha$ a dopočítajme veľkosti uhlov pri osiach vonkajších uhlov trojuholníka ABC pri vrcholoch B a C.]

D1. Daný je trojuholník ABC so stredom I vpísanej kružnice. Priesečník osi strany BC s oblúkom jemu opísanej kružnice, ktorý neobsahuje vrchol A, označme O. Dokážte, že kružnica $k(O,|OB|)$ prechádza bodom I. [Najskôr zdôvodnite, prečo bod O leží na polpriamke AI (ktorá je osou uhla BAC) a potom vyjadrite pomocou veľkostí uhlov trojuholníka ABC veľkosť uhlov IBO a BOI.]

D2. V rovine sú dané kružnice k a l, ktoré sa pretínajú v bodoch E a F. Dotyčnica ku kružnici l zostrojená v bode E pretína kružnicu k v bode H ($H \neq E$). Na oblúku EH kružnice k, ktorý neobsahuje bod F, zvoľme bod C ($E \neq C \neq H$) a priesečník priamky CE s kružnicou l označme D ($D \neq E$). Dokážte, že trojuholníky DEF a CHF sú podobné. [66–B–II–3]

---

6. *Na kruhovom opevnení hradu je niekoľko veží. Do nich sa rozmiestni päť čiernych a päť červených rytierov (v každej veži ich môže byť viac a môžu mať rôzne farby) a začnú strážiť. Po uplynutí každej hodiny prejdú všetci čierni rytieri do susednej veže v smere chodu hodinových ručičiek a všetci červení rytieri prejdú do susednej veže v opačnom smere. Dokážte nasledujúce tvrdenie:*

a) Ak je veží osem, môžu sa rytieri na začiatku rozmiestniť tak, že počas každej hodiny bude v každej veži aspoň jeden rytier.

b) Ak je veží sedem, niektorú hodinu ostane aspoň jedna veža neobsadená, nech už sa na začiatku rytieri rozmiestnia akokoľvek.

(*Pavel Calábek*)

Riešenie. V prípade ôsmich veží ich očíslujme v smere otáčania hodinových ručičiek číslami $1, 2, \ldots, 8$. Jedno z možných riešení prvej časti úlohy je, že čierni rytieri obsadia na začiatku všetky veže s párnymi číslami (v jednej z nich budú dvaja rytieri a vo zvyšných troch bude po jednom rytierovi) a podobným spôsobom obsadia červení rytieri veže s nepárnymi číslami. Po každej hodine sa situácia zmení len tak, že rytieri z veží s párnymi číslami obsadia veže s nepárnymi číslami a naopak. Vždy teda zostanú všetky veže strážené.

Prípad so siedmimi vežami je trochu náročnejší. Máme iba päť rytierov každej farby, takže aspoň dve veže nebudú obsadené čiernymi a aspoň dve veže nebudú obsadené červenými rytiermi. Z pohľadu čiernych rytierov sa dve veže neobsadené červenými rytiermi (nazvime ich biele) každú hodinu posunú o dve pozície proti smeru otáčania hodinových ručičiek. Čísla 7 a 2 sú nesúdeliteľné, takže z tohto pohľadu sa každá biela veža vráti na svoju počiatočnú pozíciu až po siedmich hodinách. Počas piatich hodín tak dve biele veže zaujmú aspoň šesť rôznych pozícií (každá z nich zaujme päť rôznych pozícií, avšak zrejme nemôže ísť o dve rovnaké pätice, to by sa veže dostali na pôvodnú pozíciu šiestym posunom[2]), a teda sa v niektorej hodine aspoň jedna dostane do aspoň jedného z dvoch miest neobsadených čiernymi rytiermi.

Návodné a doplňujúce úlohy:

N1. Na kruhovom opevnení hradu sú štyri veže. Do nich sa rozmiestnia dvaja čierni a dvaja červení rytieri a začnú strážiť. Po uplynutí každej hodiny prejdú všetci čierni rytieri do susednej veže v smere chodu hodinových ručičiek a všetci červení rytieri prejdú do susednej veže v opačnom smere. Rozmiestnite rytierov tak, aby počas každej hodiny bola každá veža strážená. [Stačí rozmiestniť rytierov tak, aby v susedných vežiach neboli rytieri rovnakej farby.]

N2. Na kruhovom opevnení hradu sú tri veže. Do nich sa rozmiestnia dvaja čierni a dvaja červení rytieri a začnú strážiť. Po uplynutí každej hodiny prejdú všetci čierni rytieri do susednej veže v smere chodu hodinových ručičiek a všetci červení rytieri prejdú do susednej veže v opačnom smere. Viete rozmiestniť rytierov tak, aby počas každej

[2] Priebeh posunov jednej veže možno znázorniť aj šípkami medzi vrcholmi načrtnutého sedemuholníka; tým sa stane očividným ako tvrdenie o perióde 7 hodín celého pohybu, tak tvrdenie o rôznosti pätíc po sebe nasledujúcich pozícií dvoch veží s rôznymi počiatočnými pozíciami.

hodiny bola každá veža strážená? [Nie. Na začiatku stráženia vyberte jednu vežu X, ktorú nestrážia čierni rytieri, a jednu vežu Y, ktorú nestrážia červení rytieri. Podobne možno nestrážené veže v ďalších hodinách určiť posunom Y a X v smere, resp. v protismere chodu hodinových ručičiek. Raz za tri hodiny tak bude platiť $X = Y$.]

D1. a) Marienka rozmiestni do vrcholov pravidelného osemuholníka rôzne počty od jedného po osem cukríkov. Peter si potom môže vybrať, ktoré tri kôpky cukríkov dá Marienke, ostatné si ponechá. Jedinou podmienkou je, že tieto tri kôpky ležia vo vrcholoch rovnoramenného trojuholníka. Marienka chce rozmiestniť cukríky tak, aby ich dostala čo najviac, nech už Peter trojicu vrcholov vyberie akokoľvek. Koľko ich tak Marienka zaručene získa?

b) Rovnakú úlohu vyriešte aj pre pravidelný deväťuholník, do ktorého vrcholov rozmiestni Marienka 1 až 9 cukríkov. (Medzi rovnoramenné trojuholníky zaraďujeme aj trojuholníky rovnostranné.)

[66–C–I–6]

D2. Každému vrcholu pravidelného 66-uholníka priradíme jedno z čísel 1 alebo -1. Ku každej úsečke spájajúcej dva jeho vrcholy (strane či uhlopriečke) potom pripíšeme súčin čísel v jej krajných bodoch a všetky čísla pri jednotlivých úsečkách sčítame. Určte najmenšiu možnú a najmenšiu nezápornú hodnotu takéhoto súčtu. [66–B–I–1]

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Pavel Leischner, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný, Ján Mazák

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017