2003/2004
53. ročník MO *Riešenia úloh krajského kola kategórie B*

---

1. *Číslo a_n vznikne tak, že za seba zapíšeme prvých n druhých mocnín po sebe idúcich prirodzených čísel. Napríklad $a_{11} = 149\,162\,536\,496\,481\,100\,121$. Zistite, koľko čísel deliteľných dvanástimi je medzi číslami $a_1, a_2, \dots, a_{100\,000}$.* (P. Černek)

Riešenie. Ako vieme, každé prirodzené číslo k dáva po delení tromi rovnaký zvyšok ako číslo $S(k)$ rovné súčtu číslic pôvodného čísla k. Číslo a_n preto dáva po delení tromi rovnaký zvyšok ako súčet $S(1^2)+S(2^2)+\dots+S(n^2)$, teda aj ako súčet $1^2+2^2+\dots+n^2$. Dvoma spôsobmi ukážeme, že ostatný súčet je deliteľný tromi práve vtedy, keď číslo n je tvaru $9k-5$, $9k-1$ alebo $9k$, pričom k je prirodzené číslo.

Pri *prvom spôsobe* využijeme známy vzťah

$$1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \tag{1}$$

z ktorého vyplýva, že skúmaný súčet je deliteľný tromi práve vtedy, keď je súčin $n(n+1)(2n+1)$ deliteľný deviatimi. Pretože čísla n, $n+1$ a $2n+1$ sú navzájom nesúdeliteľné, hľadáme práve tie n, pre ktoré je deliteľné deviatimi jedno z čísel n, $n+1$ alebo $2n+1$, a to sú postupne čísla tvaru $9k$, $9k-1$, $9k-5$.

Druhý spôsob je založený na pozorovaní, že zvyšky čísel $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, \dots$ po delení tromi sú $1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots$, opakujú sa teda s periódou dĺžky 3. Skutočne, čísla $(k+3)^2$ a k^2 dávajú rovnaký zvyšok po delení tromi, lebo ich rozdiel je číslo $3(2k+3)$, čo je násobok troch. Sčítaním uvedených zvyškov dostaneme postupne zvyšky prvých deviatich súčtov (1): 1, 2, 2, 0, 1, 1, 2, 0, 0. Zvyšky ďalších súčtov (1) sa začnú periodicky opakovať. (Vyplýva to z toho, že predchádzajúci súčet deviatich čísel dáva nulový zvyšok a súčasne je počet sčítancov násobkom periódy 3 sčítaných zvyškov.)

Vieme už, ktoré čísla a_n sú deliteľné tromi. Zaoberajme sa teraz jednoduchšou otázkou, ktoré a_n sú deliteľné štyrmi. Ukážeme, že sú to všetky a_n s párnym $n > 2$ (a žiadne iné). Číslo a_n s nepárnym n je totiž nepárne, číslo a_2 sa rovná 14 a číslo a_n s párnym $n > 2$ končí rovnakým dvojčíslím ako číslo n^2, takže je také a_n (rovnako ako spomenuté dvojčíslie) deliteľné štyrmi.

Keď spojíme výsledky o deliteľnosti tromi a štyrmi, zistíme, že číslo a_n je deliteľné dvanástimi práve vtedy, keď číslo n je tvaru $18k-14$, $18k-10$ alebo $18k$, pričom k je ľubovoľné prirodzené číslo. Pretože $100\,000 = 5\,556 \times 18 - 8$, je medzi prirodzenými číslami od 1 do 100 000 práve 5 556 čísel tvaru $18k-14$, 5 556 čísel tvaru $18k-10$ a 5 555 čísel tvaru $18k$. Spolu je to 16 667 čísel.

---

2. *Nájdite všetky kvadratické trojčleny ax^2+bx+c také, že ak ľubovoľný z koeficientov a, b, c zväčšíme o 1, dostaneme nový kvadratický trojčlen, ktorý bude mať dvojnásobný koreň.* (E. Kováč)

Riešenie. Pre koeficient a musí platiť $a \neq 0$ a $a \neq -1$, aby všetky uvažované trojčleny boli naozaj kvadratické trojčleny. Ako vieme, kvadratický trojčlen má dvojnásobný koreň práve vtedy, keď je jeho diskriminant nulový. Zostavme preto diskriminanty všetkých troch trojčlenov so zväčšenými koeficientmi:

$$\begin{array}{lll} (a+1)x^2+bc+c & \text{má diskriminant} & D_1=b^2-4(a+1)c, \\ ax^2+(b+1)x+c & \text{má diskriminant} & D_2=(b+1)^2-4ac, \\ ax^2+bx+(c+1) & \text{má diskriminant} & D_3=b^2-4a(c+1). \end{array}$$

Hľadáme teda reálne čísla a, b, c, pre ktoré platí $a \neq 0$, $a \neq -1$ a $D_1 = D_2 = D_3 = 0$.

Z rovnosti $D_1 = D_3$ vyplýva $c = a$, takže $D_2 = (b+1)^2-4a^2 = (b+1-2a)(b+1+2a)$. Rovnosť $D_2 = 0$ potom znamená, že platí $b = \pm 2a - 1$, a preto $D_1 = (\pm 2a-1)^2 - 4(a+1)a = 4a^2 \mp 4a + 1 - 4a^2 - 4a = 1 \mp 4a - 4a$, teda $D_1 = -8a + 1$ alebo $D_1 = 1$. Preto z rovnosti $D_1 = 0$ vyplýva $a = 1/8$, $b = 2a - 1 = -3/4$ a $c = a = 1/8$. (Skúška je jednoduchá, nie je však nutná, pretože naším postupom máme zaručené rovnosti $D_1 = D_3$, $D_2 = 0$ a $D_1 = 0$.)

Odpoveď. Úlohe vyhovuje jediný trojčlen $x^2/8 - 3x/4 + 1/8$.

---

3. *Pre dané prirodzené číslo n vyriešte v obore kladných reálnych čísel rovnicu*

$$\lfloor x\sqrt{n^2-1} \rfloor = nx - 1.$$

(Symbol $\lfloor r \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako r.) (J. Šimša)

Riešenie. Kladné číslo x je riešením rovnice s daným n práve vtedy, keď je číslo nx prirodzené a platia nerovnosti

$$nx - 1 \leqq x\sqrt{n^2-1} < nx.$$

Pravá nerovnosť platí pre každé $x > 0$, lebo zrejme platí $\sqrt{n^2-1} < \sqrt{n^2} = n$. Zostáva teda vyriešiť ľavú nerovnicu (vzhľadom na neznámu x). Po jednoduchej úprave dostávame

$$x\bigl(n - \sqrt{n^2-1}\bigr) \leqq 1,$$
$$x \leqq \frac{1}{n-\sqrt{n^2-1}} = n + \sqrt{n^2-1}.$$

Využili sme to, že výraz $n - \sqrt{n^2-1}$ je kladný a v súčine so združeným výrazom $n + \sqrt{n^2-1}$ dáva číslo 1. Po vynásobení oboch strán odvodenej nerovnosti číslom n dostaneme pre prirodzené číslo $k = nx$ ekvivalentnú podmienku

$$k \leqq n^2 + n\sqrt{n^2-1},$$

ktorá je splnená práve pre $k \in \{1, 2, \dots, 2n^2-1\}$, lebo pre druhý sčítanec z pravej strany ostatnej nerovnosti zrejme platia celočíselné odhady

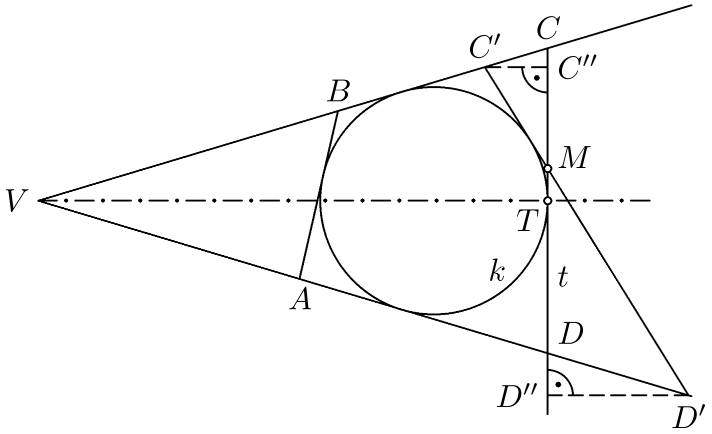
$$n^2 - 1 \leqq n\sqrt{n^2-1} < n^2$$

(znovu využívame iba nerovnosť $\sqrt{n^2-1} < n$). Všetky riešenia danej rovnice majú tvar $x = k/n$ a tvoria tak množinu zlomkov

$$\left\{ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{2n^2-1}{n} \right\}.$$

4. *Daný je ostrouhlý trojuholník VBA. Zostrojte dotyčnicový štvoruholník $ABCD$ s minimálnym obsahom tak, aby jeho vrcholy C, D ležali postupne na polpriamkach opačných k polpriamkam BV a AV.* (*P. Leischner*)

Riešenie. Kružnica vpísaná do hľadaného štvoruholníka je kružnicou k pripísanou strane AB trojuholníka BAV. Označme T ten z dvoch priesečníkov osi uhla AVB s kružnicou k, ktorý je ďalej od vrcholu V (obr. 1). Hľadané body C a D nájdeme ako priesečníky dotyčnice t v bode T ku kružnici k postupne s priamkami VB a VA. Dokážme, že takto zostrojený štvoruholník má zo všetkých štvoruholníkov vyhovujúcich podmienkam úlohy najmenší obsah.



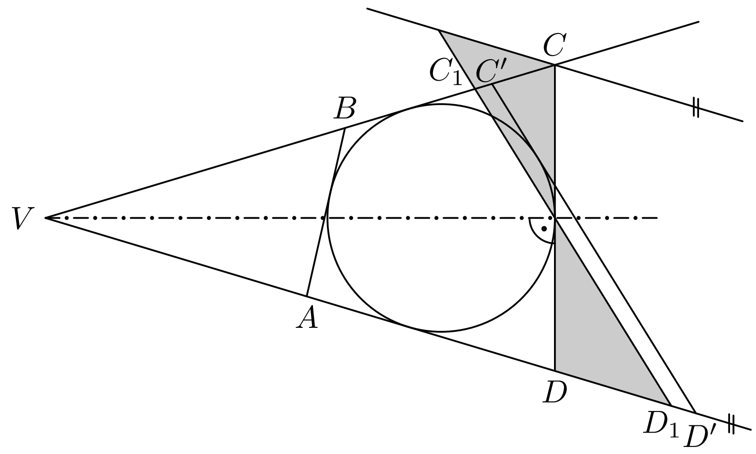
Obr. 1

Označme C', D' vrcholy iného dotyčnicového štvoruholníka s vpísanou kružnicou k (priamka $C'D'$ je dotyčnicou kružnice k). Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že priesečník M dotyčníc t a $C'D'$ leží vnútri úsečky TC. To znamená, že platí $|MD| > |MC|$ (obr. 1). Označme C'' a D'' zodpovedajúce päty kolmíc spustených z bodov C' a D' na priamku t. Bod C'' leží vnútri úsečky MC a D'' na polpriamke MD mimo úsečky MD, takže $|MC''| < |MC| < |MD| < |MD''|$ a z podobnosti pravouhlých trojuholníkov $MC'C''$ a $MD'D''$ vyplýva $|C'C''| < |D'D''|$. Trojuholník DMD' má teda väčší obsah ako trojuholník CMC'. Rozdiel ich obsahov je však rovný rozdielu obsahov štvoruholníkov $ABC'D'$ a $ABCD$, teda obsah štvoruholníka $ABC'D'$ je väčší ako obsah štvoruholníka $ABCD$.

Iné riešenie. Rovnako ako v prvom riešení označme C, D priesečníky dotyčnice t pripísanej kružnice k s ramenami VB, VA. Ak C', D' sú vrcholy iného dotyčnicového štvoruholníka s vpísanou kružnicou k, pre obsahy dotyčnicových štvoruholníkov $ABCD$ a $ABC'D'$ platí

$$S_{ABCD} = S_{VCD} - S_{VAB},$$
$$S_{ABC'D'} = S_{VC'D'} - S_{VAB}.$$

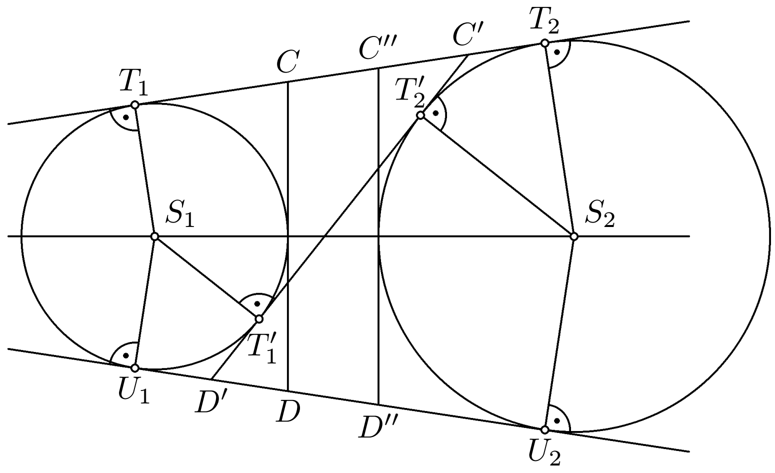
Stačí teda ukázať, že pre ľubovoľnú takú dotyčnicu $C'D'$, ktorá nie je kolmá na os uhla AVB, platí $S_{VC'D'} > S_{VCD}$. To je však zrejmé z obr. 2 (oba sivé trojuholníky majú vďaka stredovej súmernosti rovnaký obsah a pritom $S_{VC'D'} > S_{VC_1D_1} > S_{VCD}$).



Obr. 2

Iné riešenie. Obsah dotyčnicového štvoruholníka $ABCD$, ktorého vpísaná kružnica má polomer r, je $S = r(|AB| + |BC| + |CD| + |DA|)/2 = r(2|AB| + 2|CD|)/2 = r(|AB| + |CD|)$. Obsah dotyčnicového štvoruholníka $ABCD$ spĺňajúceho podmienky úlohy bude teda najmenší práve vtedy, keď bude najkratšia úsečka CD.

Uvažujme kružnicu pripísanú strane $C'D'$ trojuholníka $VC'D'$ (obr. 3). Z vlastností



Obr. 3

dotyčníc postupne nahliadneme, že $|T_1C| = |CD|/2$, $|T_2C''| = |C''D''|/2$ a tiež $|C'D'| = |T_1T_2|$. Ostatná rovnosť vyplýva zo známych vlastností vpísanej a pripísanej kružnice, totiž že ich body dotyku na spoločnú stranu sú súmerne združené podľa stredu strany. Dôkaz tohto tvrdenia vyžaduje trochu počítania:

$$|T_1T_2| = |T_1C'| + |C'T_2| = |T_1'C'| + |C'T_2'| = |T_1'T_2'| + 2|T_2'C'|,$$
$$|U_1U_2| = |U_1D'| + |D'U_2| = |T_1'D'| + |D'T_2'| = |T_1'T_2'| + 2|T_1'D'|.$$

Zo súmernosti podľa osi uhla AVB vyplýva $|T_1T_2| = |U_1U_2|$, takže $|T_2'C'| = |T_1'D'|$. Teda $|C'D'| = |T_1'T_2'| + 2|T_2'C'| = |T_1T_2|$.

Pretože obe kružnice sú oddelené spoločnou dotyčnicou $C'D'$, nemôžu sa dotýkať. Takže $|CD| < |C''D''|$, čiže $|CT_1| < |C''T_2|$. To znamená, že

$$|CD| = 2|T_1C| < |T_1C| + |C''T_2| < |T_1T_2| = |C'D'|,$$

čo sme chceli dokázať.