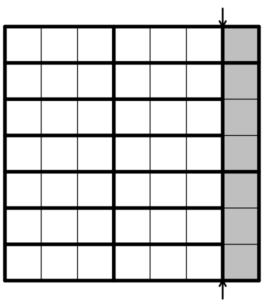
2003/2004
53. ročník MO *Riešenia úloh domáceho kola kategórie C*

---

1. *Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n, ktoré je väčšie ako 3 a nie je deliteľné tromi, platí: Šachovnicu $n \times n$ je možné rozrezať na jeden štvorec 1×1 a obdĺžniky 3×1.* (*J. Zhouf*)

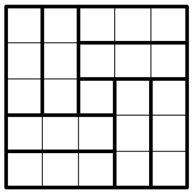
Riešenie. Keď budeme premýšľať nad postupmi rezania šachovníc veľkých rozmerov, určite si uvedomíme, že na obdĺžniky 3×1 možno rozrezať každý „pás" šachovnice tvorený tromi susednými riadkami alebo stĺpcami. Také pásy sa preto oplatí od šachovnice opakovane odrezávať (pokiaľ je to možné), a tak zmenšovať jej rozmery o násobky troch. Preto bude pre našu úlohu o šachovnici $n \times n$ výhodné rozlíšiť, či dané číslo $n > 3$ dáva po delení tromi zvyšok 1, alebo zvyšok 2 (zvyšok 0 je zadaním vylúčený). Každý z týchto prípadov preskúmame osobitne.

Prípad $n = 3k + 1$. Najskôr zo šachovnice $(3k + 1) \times (3k + 1)$ odrežeme pás prvých $3k$ stĺpcov, teda obdĺžnik $(3k + 1) \times 3k$, ktorý potom rozrežeme (po trojiciach stĺpcov) na k pásov $(3k + 1) \times 3$ a každý z nich nakoniec rozrežeme na $3k + 1$ obdĺžnikov 1×3. Z pôvodnej šachovnice nám tak zostane nerozrezaný posledný stĺpec. Pretože má $3k +$ $+ 1$ políčok, ľahko ho rozrežeme na jeden štvorec 1×1 a k obdĺžnikov 3×1. Na obr. 1 je znázornené výsledné rozrezanie šachovnice 7×7 (počiatočné odrezanie pásu 7×6 je vyznačené šípkami, zvyšný stĺpec je sivý). Na tom istom obrázku vidíme aj spôsob rozrezania pre $n = 4$.

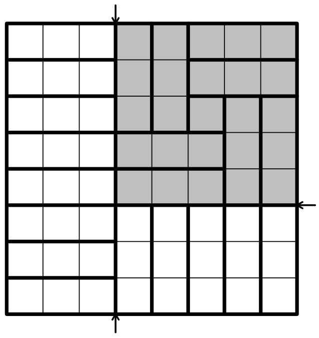


Obr. 1

Prípad $n = 3k + 2$. Keby sme šachovnicu $(3k + 2) \times (3k + 2)$ dôsledne „orezávali" postupom z úvodu riešenia, dostali by sme (po oddelení dvoch pásov $(3k + 2) \times 3k$ a $3k \times 2$) ako zvyšok šachovnicu 2×2, ktorú však nie je možné rozrezať požadovaným spôsobom (na diely 1×1 a 3×1). To je možné urobiť až s „nasledujúcou" šachovnicou 5×5, ako vidíme na obr. 2.



Obr. 2



Obr. 3

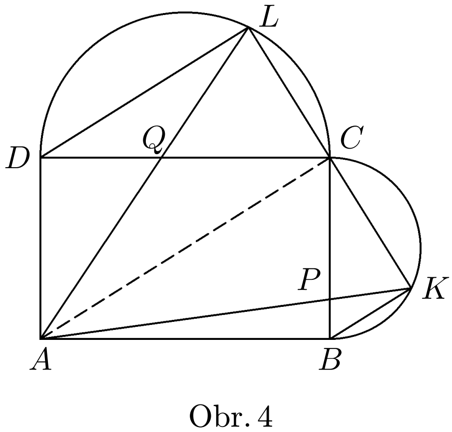
Ostáva popísať, ako každú väčšiu šachovnicu $(3k+2)\times(3k+2)$ rezaním zredukovať na štvorec 5×5. Najskôr oddelíme pás $(3k+2)\times(3k-3)$ tvorený prvými $(k-1)$ trojicami stĺpcov šachovnice. Zo zvyšnej šachovnice $(3k+2)\times 5$ potom oddelíme pás $(3k-3)\times 5$ tvorený jej poslednými $(k-1)$ trojicami riadkov, z pôvodnej šachovnice tak zostane žiadaný štvorec 5×5 v pravom hornom rohu (sivý na obr. 3 pre šachovnicu 8×8).

Dodajme, že pri riešení danej úlohy sme nebrali do úvahy ofarbenie políčok šachovnice. Farby políčok sa používajú v iných situáciách, hlavne vtedy, keď potrebujeme dokázať, že rozrezanie šachovnice na diely predpísaného tvaru nie je možné.

---

2. *Daný je obdĺžnik $ABCD$. Nech priamky p a q, ktoré prechádzajú vrcholom A, pretínajú polkružnice zvonku pripísané stranám BC a CD v bodoch K a L ($B\neq K\neq$ $\neq C\neq L\neq D$) a taktiež strany BC a CD v bodoch P a Q tak, že trojuholník ABP má taký istý obsah ako trojuholník KCP a súčasne trojuholník AQD má taký istý obsah ako trojuholník CLQ. Dokážte, že body K, L, C ležia na jednej priamke.* (J. Švrček)

Riešenie. Trojuholníky ABP a KCP majú podľa zadania rovnaké obsahy. Keď ku každému z nich pripojíme trojuholník ACP (obr. 4), nahliadneme, že rovnaké obsahy majú aj trojuholníky ABC a AKC. Pretože oba tieto trojuholníky majú spoločnú stranu AC, obe k nej prislúchajúce výšky musia byť zhodné. Body B a K teda majú rovnakú vzdialenosť od priamky AC (a ležia v rovnakej polrovine touto priamkou určenou). To znamená, že $BK \parallel AC$. Podľa Tálesovej vety však platí $BK\perp CK$, takže platí aj $AC\perp CK$.



Obr. 4

Podobne z rovnosti obsahov trojuholníkov AQD, CLQ a kolmosti priamok CL a DL odvodíme, že $AC \perp CL$. Spolu to znamená, že uhol KCL je zložený z dvoch pravých uhlov ACK a ACL. Body K a L teda ležia na priamke, ktorá prechádza bodom C kolmo na uhlopriečku AC.

---

3. *Žiak mal vypočítať príklad $X \cdot Y : Z$, kde X je dvojciferné číslo, Y trojciferné číslo a Z trojciferné číslo s číslicou 2 na mieste jednotiek. Výsledkom príkladu malo byť prirodzené číslo. Žiak ale prehliadol bodku a súčin $X \cdot Y$ chápal ako päťciferné číslo. Dostal tak sedemkrát väčší výsledok ako mal vyjsť. Aký príklad mal žiak počítať?*

(*P. Černek*)

Riešenie.

Pretože Y je trojciferné číslo, päťciferné číslo so zápisom XY je číslo $1\,000X + Y$. Žiak teda počítal príklad $(1\,000X+Y) : Z$ a podľa zadania mu v porovnaní s pôvodným príkladom vyšiel sedemkrát väčší výsledok, teda

$$\frac{1\,000X + Y}{Z} = 7 \cdot \frac{X \cdot Y}{Z}.$$

Odtiaľ po násobení číslom Z dostaneme rovnicu $1\,000X + Y = 7XY$, ktorú vyriešime vzhľadom na neznámu Y:

$$Y = \frac{1\,000X}{7X - 1}.$$

Pre ktoré X je ostatný zlomok celočíselný? Inak povedané, kedy je číslo $1\,000X$ deliteľné číslom $7X - 1$? Pretože čísla X a $7X - 1$ sú nesúdeliteľné (nesúdeliteľné sú totiž dve po sebe idúce čísla $7X - 1$ a $7X$), hľadáme tie X, pre ktoré číslo $7X - 1$ delí číslo $1\,000$. Aby sme nemuseli vypisovať všetky delitele čísla $1\,000$, uvedomíme si, že X je dvojciferné, teda $69 \leqq 7X - 1 \leqq 692$. Rozložme preto číslo $1\,000$ všetkými spôsobmi na súčin dvoch činiteľov tak, aby jeden (povedzme prvý) z činiteľov bol z intervalu $\langle 69, 692 \rangle$:

$$1\,000 = 500 \cdot 2 = 250 \cdot 4 = 200 \cdot 5 = 125 \cdot 8 = 100 \cdot 10.$$

Z rovníc

$$7X - 1 = 500,\ 7X - 1 = 250,\ 7X - 1 = 200,\ 7X - 1 = 125,\ 7X - 1 = 100$$

má jedine rovnica $7X - 1 = 125$ celočíselné riešenie $X = 18$, pre ktoré vychádza $Y = 1\,000X/(7X - 1) = 1\,000 \cdot 18/125 = 144$.

Teraz určíme neznáme číslo Z. Využijeme na to podmienku zo zadania, že hodnota výrazu $X \cdot Y : Z$ je prirodzené číslo. Pretože $X = 18$ a $Y = 144$, jedná sa o číslo $18 \cdot 144 : Z$, teda číslo $2^5 \cdot 3^4 : Z$. Také číslo je celé práve vtedy, keď má číslo Z rozklad na prvočinitele tvaru $2^a 3^b$, kde $0 \leqq a \leqq 5$ a $0 \leqq b \leqq 4$. Exponenty a, b nájdeme podľa podmienky zo zadania, že číslo $Z = 2^a 3^b$ je trojciferné a na mieste jednotiek má číslicu 2. Pretože $3^4 = 81$ a $2^5 \cdot 3 = 96$, musí byť $a \geqq 1$ a $b \geqq 2$. Všetky čísla $2^a 3^b$, kde $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $b \in \{2, 3, 4\}$ teraz vypíšeme do tabuľky.

b \ a	1	2	3	4	5
2	18	36	72	144	288
3	54	108	216	432	864
4	162	324	648	1 296	2 592

Z vypočítaných čísel majú požadovanú vlastnosť iba čísla $Z = 432 = 2^4 3^3$ a $Z = 162 = 2^1 3^4$.

Odpoveď. Úloha má dve riešenia. Žiak mal počítať buď príklad $18 \cdot 144 : 432$, alebo príklad $18 \cdot 144 : 162$.

Iné riešenie. Tak, ako v prvom riešení, odvodíme vyjadrenie

$$Y = \frac{1\,000X}{7X - 1}.$$

Teraz však získaný zlomok upravíme čiastočným vydelením čísla 1 000 číslom 7. Na základe rovnosti $1\,000 = 7 \cdot 143 - 1$ dostávame

$$Y = \frac{1\,000X}{7X - 1} = \frac{143(7X - 1) + 143 - X}{7X - 1} = 143 + \frac{143 - X}{7X - 1}.$$

Aby bolo Y celé, musí byť ostatný zlomok $(143 - X)/(7X - 1)$ celočíselný. Pretože číslo X je dvojciferné, náš zlomok spĺňa odhady

$$\frac{143 - 99}{7 \cdot 99 - 1} < \frac{143 - X}{7X - 1} < \frac{143 - 10}{7 \cdot 10 - 1}.$$

Ľavý zlomok je rovný $44/692$, pravý je rovný $133/69$, takže jediná možná celočíselná hodnota prostredného zlomku je rovná 1. Musí teda platiť $Y = 144$. Rovnica

$$\frac{143 - X}{7X - 1} = 1$$

má potom jediné riešenie $X = 18$. Ďalej už postupujeme ako v prvom riešení.

Iné riešenie. Skôr získanú rovnicu $1\,000X + Y = 7XY$ upravíme na súčinový tvar $Y = X \cdot (7Y - 1\,000)$. Musí preto platiť $7Y - 1\,000 > 0$, odkiaľ

$$Y > \frac{1\,000}{7} > 142, \quad \text{čiže} \quad Y \geqq 143.$$

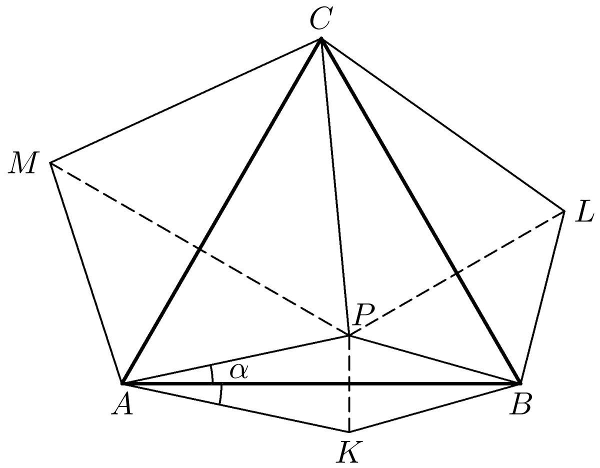
Číslo X je dvojciferné, preto z rovnosti $Y = X \cdot (7Y - 1\,000)$ vychádza odhad

$$Y \geqq 10 \cdot (7Y - 1\,000), \quad \text{čiže} \quad Y \leqq \frac{10\,000}{69} < 145.$$

Spolu dostávame, že číslo Y je rovné jednému z čísel 143 alebo 144. Rovnica $143 = X \cdot (7 \cdot 143 - 1\,000)$ má riešenie $X = 143$, čo však nie je dvojciferné číslo. Rovnica $144 = X \cdot (7 \cdot 144 - 1\,000)$ má riešenie $X = 18$. Tak sme znovu ukázali, že $X = 18$ a $Y = 144$. Číslo Z určíme ako v prvom riešení.

4. *Nech P je ľubovoľný vnútorný bod rovnostranného trojuholníka ABC. Uvažujme obrazy K, L a M bodu P v osových súmernostiach s osami AB, BC a CA. Určte množinu všetkých bodov P takých, že trojuholník KLM je rovnoramenný.* (J. Zhouf)

Riešenie. Označme $\alpha = |\measuredangle BAP|$, $0° < \alpha < 60°$ (obr. 5). Pretože uhly BAP a BAK sú



Obr. 5

súmerne združené podľa osi AB, platí tiež $|\measuredangle BAK| = \alpha$. Pretože $|\measuredangle CAP| = |\measuredangle CAB| - |\measuredangle BAP| = 60° - \alpha$, zo súmernosti podľa osi CA vyplýva rovnosť $|\measuredangle CAM| = 60° - \alpha$. Pre veľkosť uhla KAM teda platí

$$|\measuredangle KAM| = |\measuredangle BAK| + |\measuredangle BAC| + |\measuredangle CAM| = \alpha + 60° + (60° - \alpha) = 120°.$$

Zo súmerností podľa osí AB a CA vyplývajú tiež rovnosti $|AK| = |AP| = |AM|$. Preto je trojuholník KAM rovnoramenný a jeho uhol pri hlavnom vrchole A má veľkosť 120°. Podobne sa zdôvodní, že aj trojuholníky LBK a MCL sú rovnoramenné a ich vnútorné uhly pri hlavných vrcholoch B a C majú veľkosť 120°.

Pri posudzovaní podmienky, či trojuholník KLM je rovnoramenný, musíme rozlíšiť, ktoré z jeho strán KL, LM, MK sú zhodné. Vzhľadom na symetriu rozoberieme podrobne iba prípad, keď $|KL| = |MK|$. Z podobných rovnoramenných trojuholníkov KAM a LBK vyplýva, že ich základne MK a KL sú zhodné práve vtedy, keď sú zhodné ich ramená AK a BK. Zapíšme to pomocou dĺžok úsečiek: rovnosť $|KL| = |MK|$ platí práve vtedy, keď platí rovnosť $|AK| = |BK|$, čiže rovnosť $|AP| = |BP|$. Ostatná rovnosť však nastane práve vtedy, keď bod P leží na osi strany AB. Podobne sa zistia podmienky ekvivalentné rovnostiam $|MK| = |LM|$ a $|KL| = |LM|$.

Odpoveď. Trojuholník KLM je rovnoramenný práve vtedy, keď bod P leží na aspoň jednej z osí strán daného rovnostranného trojuholníka ABC. Hľadaná množina je preto zjednotením troch úsečiek – výšok trojuholníka ABC (bez ich krajných bodov).

5. *Prirodzené číslo nazveme magickým práve vtedy, keď sa dá rozložiť na súčet dvoch trojmiestnych čísel zapísaných rovnakými číslicami, ale v opačnom poradí. Napríklad číslo* 1 413 *je magické, lebo* $1\,413 = 756 + 657$*; najmenšie magické číslo je* 202.

a) Určte počet všetkých magických čísel.

b) Ukážte, že súčet všetkých magických čísel je 187 000. (J. Šimša)

Riešenie. Na príklade čísla 1 413 vidíme, že niekedy nie je ľahké spoznať, či dané trojmiestne alebo štvormiestne číslo je magické. Pozrime sa preto najskôr, ako sa magické číslo x vyjadrí pomocou číslic tých trojmiestnych čísel $\overline{abc}$ a $\overline{cba}$, ktorých je súčtom:

$$x = \overline{abc} + \overline{cba} = (100a + 10b + c) + (100c + 10b + a) = 101(a + c) + 20b.$$

Vidíme, že číslo x je určené číslicami a, b, c tak, že závisí len na b a na súčte $a + c$. Znamená to, že rôzne trojice číslic a, b, c môžu určovať to isté magické číslo x (nemyslíme tým iba trojice líšiace sa vzájomnou výmenou číslic a a c). Ak napr. $a + c = 14$ a $b = 9$, nájdeme tri rôzne vyjadrenia magického čísla 1 594:

$$1\,594 = 599 + 995 = 698 + 896 = 797 + 797.$$

Existujú ešte iné „magické" vyjadrenia čísla 1 594? Všetko závisí od toho, či sú rovnicou $1\,594 = 101s + 20b$ hodnoty súčtu číslic $s = a + c$ a číslice b jednoznačne určené. Z rovnice ihneď vidíme, že číslo s končí číslicou 4, takže $s = 4$ alebo $s = 14$ (iné hodnoty súčtu $s = a + c$ nie sú číslicami a, c dosiahnuteľné). Kým hodnote $s = 14$ zodpovedá (ako dobre vieme) hodnota $b = 9$, pre $s = 4$ dostaneme rovnicu $1\,594 = 404 + 20b$, ktorá nemá celočíselné riešenie.

Poučení uvedeným príkladom sa pokúsime stanoviť počet magických čísel ako počet čísel tvaru $x = 101s + 20b$, kde číslo s (rovné súčtu číslic a a c, ktoré sú *nenulové*) prebieha množinu $\{2, 3, 4, \dots, 18\}$, zatiaľ čo číslica b prebieha (nezávisle od súčtu s) množinu $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Pretože číslo s nadobúda celkom 17 rôznych hodnôt a číslo b celkom 10 rôznych hodnôt, je počet všetkých dvojíc (s, b), ktoré môžeme do vzťahu $x = 101s + 20b$ dosadiť, rovný číslu $17 \cdot 10 = 170$. Ak teraz ukážeme, že po dosadení ľubovoľných dvoch rôznych dvojíc (s_1, b_1) a (s_2, b_2) dostaneme dve rôzne magické čísla

$$x_1 = 101s_1 + 20b_1 \quad \text{a} \quad x_2 = 101s_2 + 20b_2,$$

bude to znamenať, že počet všetkých hodnôt x (teda *počet* všetkých magických čísel) je tiež rovný číslu 170.

Pripusťme, že pre niektoré dvojice (s_1, b_1) a (s_2, b_2) platí $x_1 = x_2$. Rovnosť $101s_1 + 20b_1 = 101s_2 + 20b_2$ upravíme na tvar $101(s_1 - s_2) = 20(b_2 - b_1)$, z ktorého vzhľadom na nesúdeliteľnosť čísel 20 a 101 vyplýva, že číslo $b_2 - b_1$ je násobkom čísla 101. Musí sa pritom jednať o nulový násobok, lebo $|b_2 - b_1| \leqq 9$ (b_1 a b_2 sú číslice). Platí teda $b_2 - b_1 = 0$, takže tiež $s_1 - s_2 = 0$, čo spolu znamená, že dvojice (s_1, b_1) a (s_2, b_2) sú rovnaké. Len v tomto prípade je teda rovnosť $x_1 = x_2$ možná.

Súčet všetkých magických čísel (teda čísel tvaru $x = 101s + 20b$) výhodne určíme, keď čísla najskôr usporiadame do obdĺžnikovej schémy (podľa rovnakých hodnôt s do riadkov a podľa rovnakých hodnôt b do stĺpcov)

$$\begin{array}{ccccc}
101 \cdot 2 + 20 \cdot 0 & 101 \cdot 2 + 20 \cdot 1 & 101 \cdot 2 + 20 \cdot 2 & \dots & 101 \cdot 2 + 20 \cdot 9 \\
101 \cdot 3 + 20 \cdot 0 & 101 \cdot 3 + 20 \cdot 1 & 101 \cdot 3 + 20 \cdot 2 & \dots & 101 \cdot 3 + 20 \cdot 9 \\
101 \cdot 4 + 20 \cdot 0 & 101 \cdot 4 + 20 \cdot 1 & 101 \cdot 4 + 20 \cdot 2 & \dots & 101 \cdot 4 + 20 \cdot 9 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
101 \cdot 17 + 20 \cdot 0 & 101 \cdot 17 + 20 \cdot 1 & 101 \cdot 17 + 20 \cdot 2 & \dots & 101 \cdot 17 + 20 \cdot 9 \\
101 \cdot 18 + 20 \cdot 0 & 101 \cdot 18 + 20 \cdot 1 & 101 \cdot 18 + 20 \cdot 2 & \dots & 101 \cdot 18 + 20 \cdot 9
\end{array}$$

a potom čísla sčítame buď po stĺpcoch, alebo po riadkoch. Rozhodnime sa pre sčítanie po stĺpcoch, pričom budeme brať do úvahy, o koľko sa čísla uvažovaného stĺpca líšia od príslušných čísel prvého stĺpca. Súčet čísel v prvom stĺpci je

$$101 \cdot (2 + 3 + \cdots + 18) = 101 \cdot 170,$$

v druhom stĺpci je súčet $101 \cdot 170 + 17 \cdot 20 \cdot 1$, v treťom $101 \cdot 170 + 17 \cdot 20 \cdot 2$, atď., až v poslednom (desiatom) stĺpci je súčet čísel rovný $101 \cdot 170 + 17 \cdot 20 \cdot 9$. Súčet všetkých magických čísel je teda rovný

$$10 \cdot 101 \cdot 170 + 17 \cdot 20 \cdot (1 + 2 + \cdots + 9) = 187\,000.$$

---

6. *Zo všetkých štvoruholníkov, ktoré sa dajú vpísať do danej kružnice s polomerom r a ktoré majú dve strany danej dĺžky m, určte tie, ktoré majú najväčší obsah.*

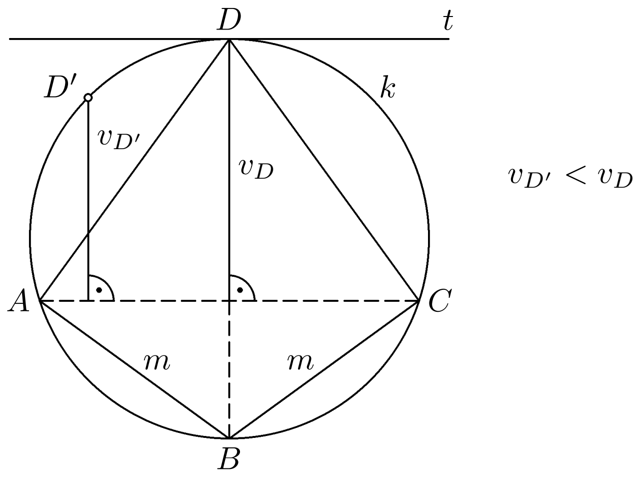
(*P. Leischner*)

Riešenie.

V celom riešení budeme predpokladať, že dané dĺžky m a r spĺňajú nerovnosť $m < 2r$, inak žiadny štvoruholník požadovaných vlastností neexistuje. Strany dĺžky m každého takého štvoruholníka sú totiž tetivami kružnice s polomerom r a najviac jedna z nich môže byť jej priemerom.

Skúmané štvoruholníky rozdelíme do dvoch skupín podľa toho, či sú ich strany danej dĺžky m susedné, alebo protiľahlé.

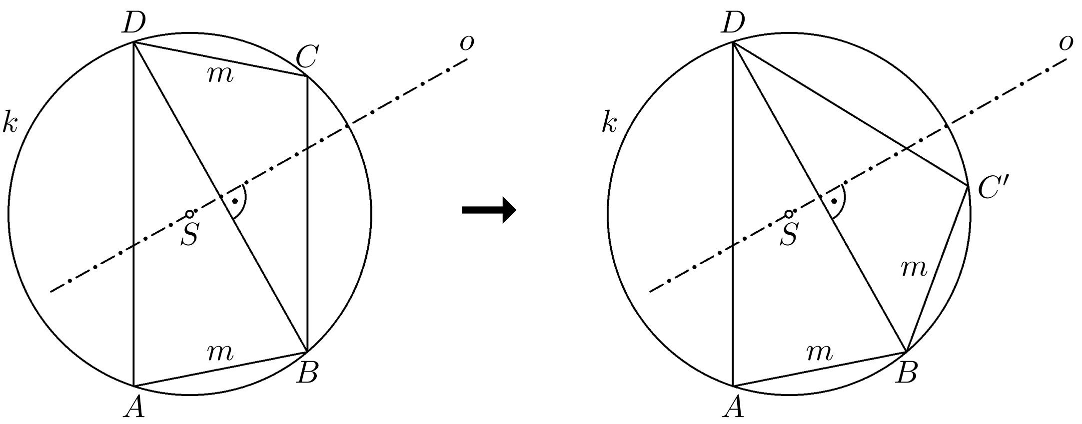
Ľubovoľný štvoruholník z prvej skupiny označíme $ABCD$ tak, aby platilo $|AB| = |BC| = m$. Uhlopriečka rozdelí tento tetivový štvoruholník na dva trojuholníky ABC a ACD (obr. 6), pritom je jasné, že prvý z nich, trojuholník ABC, je polomerom r



Obr. 6

opísanej kružnice k a dĺžkou m dvoch jeho strán určený (až na zhodnosť) jednoznačne, takže má pevne určený obsah. Preto bude obsah takého štvoruholníka $ABCD$ maximálny práve vtedy, keď bude maximálny obsah trojuholníka ACD. Tento trojuholník má určenú dĺžku strany AC, takže jeho obsah bude maximálny práve vtedy, keď bude maximálna jeho výška v_D z vrcholu D. Pri pevnej polohe trojuholníka ABC bod D prebieha ten oblúk AC kružnice k, ktorý neobsahuje bod B, takže výška v_D je zrejme najväčšia práve vtedy, keď bod D je stredom tohto oblúka, leží teda (rovnako ako bod B) na osi úsečky AC. (Tvrdenie zdôvodníme pomocou dotyčnice t ku kružnici k, ktorá prechádza nájdeným bodom D rovnobežne s priamkou AC, obr. 6). Tak prichádzame k záveru, že v prvej skupine má maximálny obsah ten štvoruholník, ktorý je deltoid (ak $m \neq r\sqrt{2}$), respektíve štvorec (ak $m = r\sqrt{2}$).

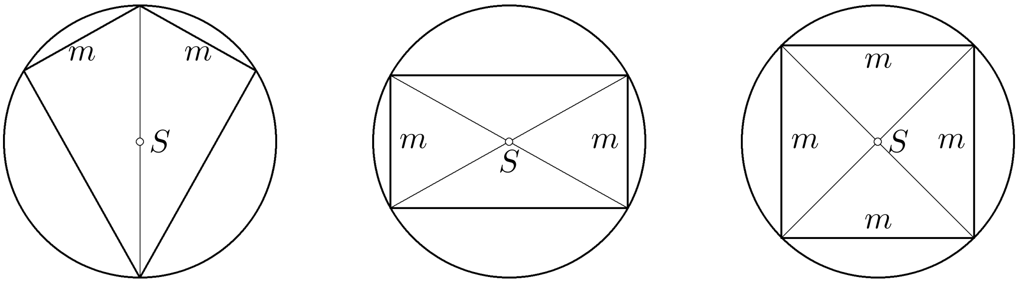
Prejdime teraz k štvoruholníkom druhej skupiny. Ľubovoľný z nich označme $ABCD$ tak, aby platilo $|AB| = |CD| = m$ (obr. 7).



Obr. 7

Obrázok ukazuje, ako k takému štvoruholníku $ABCD$ zostrojiť pomocný štvoruholník $ABC'D$, ktorý má rovnaký obsah ako $ABCD$, je vpísaný do tej istej kružnice k a má susedné strany AB a BC' danej dĺžky m. Konštrukciu teraz popíšeme a spomenuté vlastnosti štvoruholníka $ABC'D$ podrobne zdôvodníme. Bod C' zostrojíme ako obraz bodu C v súmernosti podľa osi o úsečky BD. Pretože kružnica k je súmerná podľa osi každej svojej tetivy, platí $C' \in k$. Trojuholníky BCD a $DC'B$ sú súmerne združené podľa osi o, takže majú rovnaký obsah, preto rovnaký obsah majú aj štvoruholníky $ABCD$ a $ABC'D$. Zo spomenutej súmernosti rovnako vyplývajú rovnosti $|CD| = |BC'|$ a $|BC| = |DC'|$, takže štvoruholníky $ABCD$ a $ABC'D$ sa líšia iba „vymenením“ dvoch susedných strán. Tým sú potrebné vlastnosti štvoruholníka $ABC'D$ zdôvodnené. Ako už vieme z predchádzajúceho odstavca, štvoruholník $ABC'D$ má najväčší možný obsah práve vtedy, keď platí rovnosť $|C'D| = |AD|$, ktorú môžeme prepísať ako rovnosť $|BC| = |AD|$. Tá nastane práve vtedy, keď je štvoruholník $ABCD$ rovnobežník (lebo od začiatku predpokladáme, že $|AB| = |CD|$). Každý rovnobežník vpísaný do kružnice je ale pravouholník (súčet protiľahlých vnútorných uhlov tetivového štvoruholníka je $180°$, také uhly sú ale v prípade rovnobežníka zhodné, a teda pravé). Zhrňme výsledok tohto odstavca. V druhej skupine štvoruholníkov má maximálny obsah ten štvoruholník, ktorý je obdĺžnik (ak $m \neq r\sqrt{2}$), respektíve štvorec (ak $m = r\sqrt{2}$.)

Záver. Hľadané štvoruholníky s maximálnym obsahom tvoria v prípade $m < 2r$, $m \neq r\sqrt{2}$, dve skupiny: skupinu zhodných deltoidov a skupinu zhodných obdĺžnikov. V prípade $m = r\sqrt{2}$ sú všetky hľadané štvoruholníky zhodné štvorce (obr. 8). (V prípade $m \geqq 2r$ je množina uvažovaných štvoruholníkov prázdna).



Obr. 8