

2008/2009

58. ročník MO

Zadania úloh krajského kola kategórie C

(Súťaž sa konala v utorok 7. apríla 2009.)

1. Uvažujme výraz

$$V(x) = \frac{5x^4 - 4x^2 + 5}{x^4 + 1}.$$

- a) Dokážte, že pre každé reálne číslo x platí $V(x) \geq 3$.
b) Nájdite najväčšiu hodnotu $V(x)$. (Aleš Kobza)

2. V pravouhlom trojuholníku ABC označíme P päť výšky z vrcholu C na preponu AB a D, E stredy kružníc vpísaných postupne trojuholníkom APC, CPB . Dokážte, že stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC je priesečníkom výšok trojuholníka CDE .

(Pavel Leischner)

3. Z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 99\}$ je vybraných niekoľko rôznych čísel tak, že súčet žiadnych troch z nich nie je násobkom deviatich.

- a) Dokážte, že medzi vybranými číslami sú najviac štyri deliteľné tromi.
b) Ukážte, že vybraných čísel môže byť 26. (Jaromír Šimša)

4. Pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB a obsahom S je opísaná kružnica. Dotyčnica k tejto kružnici v bode C pretína dotyčnice vedené bodmi A a B v bodoch D a E . Vyjadrite dĺžku úsečky DE pomocou dĺžky c prepony a obsahu S .

(Peter Novotný)