2003/2004
53. ročník MO *Riešenia úloh školského kola kategórie C*

1. *Určte počet všetkých trojciferných čísel, ktoré sú devätnásťkrát väčšie ako ich ciferný súčet.* (J. Šimša)

Riešenie. Trojciferné číslo so zápisom $\overline{abc}$ má požadovanú vlastnosť práve vtedy, keď jeho číslice a, b, c spĺňajú rovnosť

$$100a + 10b + c = 19(a + b + c), \quad \text{čiže} \quad 9a = b + 2c.$$

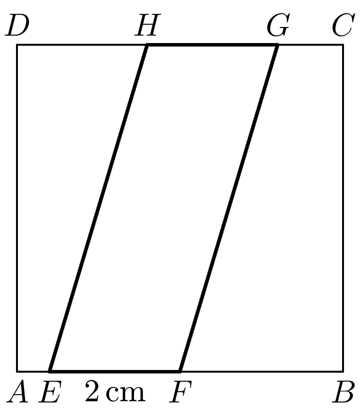
Pretože $b \leqq 9$ a $c \leqq 9$, platí nerovnosť $b + 2c \leqq 27$. Z rovnosti $9a = b + 2c$ preto vyplýva odhad $a \leqq 3$, takže platí $a \in \{1, 2, 3\}$ (číslica $a = 0$ nie je na začiatku zápisu dovolená). Pre $a = 1$ dostávame rovnicu $9 = b + 2c$, z ktorej vyplýva $c \leqq 4$; pre každé také $c \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ je číslica b určená rovnosťou $b = 9 - 2c$. Preto s číslicou $a = 1$ existuje práve 5 vyhovujúcich čísel. Práve toľko je aj vyhovujúcich čísel s číslicou $a = 2$, z rovnice $18 = b + 2c$ totiž vyplýva $c \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$ a $b = 18 - 2c$. Nakoniec pre $a = 3$ z rovnice $27 = b + 2c$ vyplýva $b = c = 9$. Hľadaný počet čísel je teda $5 + 5 + 1 = 11$.

Iné riešenie. Súčet číslic ľubovoľného trojciferného čísla neprevyšuje číslo 27, ktorého devätnásťnásobok je 513. Preto každé vyhovujúce číslo neprevyšuje 513, takže súčet jeho číslic je najviac $4 + 9 + 9 = 22$. Pretože najmenší trojciferný násobok čísla 19 je číslo $114 = 19 \cdot 6$, bude úloha vyriešená, keď zistíme, koľko čísel tvaru $19s$, pričom $s \in \{6, 7, 8, \dots, 22\}$, má súčet číslic rovný práve číslu s. Triviálnym preverením zistíme, že z uvedených 17 čísel vyhovujú práve čísla 114, 133, 152, 171, 190, 209, 228, 247, 266, 285 a 399. Týchto čísel je 11.

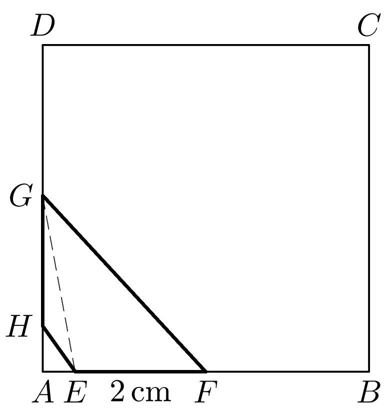
2. *Je daný štvorec so stranou dĺžky* 5 cm. *Uvažujme štvoruholník, ktorý leží v danom štvorci tak, že má dve strany dlhé* 2 cm, *pričom obidve tieto strany ležia na obvode daného štvorca. Nájdite všetky štvoruholníky s danými vlastnosťami, ktoré majú maximálny obsah.* (P. Leischner)

Riešenie. Štvoruholník $EFGH$ môžeme do daného štvorca $ABCD$ umiestniť tromi spôsobmi.

Prvý spôsob. Dve strany dĺžky 2 cm ležia na protiľahlých stranách daného štvorca (obr. 1). Obsah každého takého štvoruholníka (rovnobežníka) je $S = 5 \cdot 2\,\mathrm{cm}^2 = 10\,\mathrm{cm}^2$.



Obr. 1

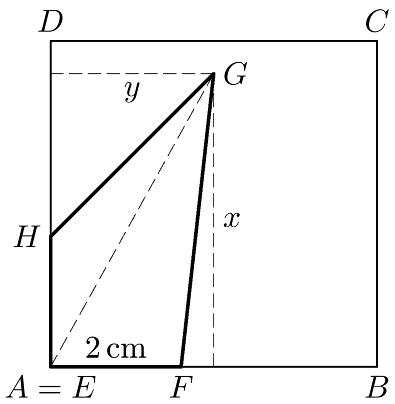


Obr. 2

Druhý spôsob. Obe strany dĺžky 2 cm ležia na susedných stranách daného štvorca a pritom sú protiľahlými stranami štvoruholníka $EFGH$ (obr. 2). Obsah takého štvoruholníka je

$$S = \frac{1}{2}|EF| \cdot |AG| + \frac{1}{2}|GH| \cdot |AE| = \frac{1}{2} \cdot 2\,\mathrm{cm} \cdot |AG| + \frac{1}{2} \cdot 2\,\mathrm{cm} \cdot |AE| \leqq$$
$$\leqq \big(5 + (5-2)\big)\,\mathrm{cm}^2 = 8\,\mathrm{cm}^2 < 10\,\mathrm{cm}^2.$$

Tretí spôsob. Obe strany dĺžky 2 cm ležia na susedných stranách daného štvorca a pritom sú susednými stranami štvoruholníka $EFGH$ (obr. 3). Ak označíme postupne



Obr. 3

x a y vzdialenosti bodu G od strán AB a AD (teda výšku trojuholníka EFG na stranu EF a výšku trojuholníka EHG na stranu EH), je obsah takého štvoruholníka

$$S = \frac{1}{2}|EF| \cdot x + \frac{1}{2}|AH| \cdot y \leqq 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 10\,\mathrm{cm}^2.$$

Rovnosť nastane práve vtedy, keď $x = y = 5$ cm, t. j. práve vtedy, keď $G = C$.

Záver. Najväčší možný obsah ($10\,\mathrm{cm}^2$) majú všetky rovnobežníky, ktorých dve strany dĺžky 2 cm ležia na protiľahlých stranách daného štvorca a štyri deltoidy, ktorých jedna uhlopriečka je zároveň uhlopriečkou daného štvorca.

---

3. *Dlaždica A je zložená z troch jednotkových štvorcov a má tvar . Dlaždica B je zložená zo štyroch jednotkových štvorcov a má tvar . Koľko dlaždíc jednotlivých typov potrebujeme na vydláždenie štvorca so stranou 6 jednotiek? Pre každý možný počet dlaždíc uveďte príklad takého pokrytia.* (*J. Földes*)

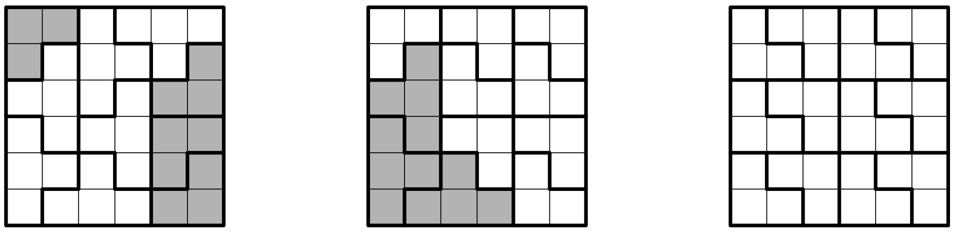
Riešenie. Predpokladajme, že štvorec so stranou 6 jednotiek je vydláždený a dlaždicami typu A a b dlaždicami typu B (nevylučujeme prípad, že $a = 0$ alebo $b = 0$). Pre obsah vydláždenej plochy potom platí rovnosť $36 = 3a + 4b$, z ktorej vyplýva, že číslo a je násobkom štyroch (a číslo b násobkom troch). Preto má rovnica $36 = 3a + 4b$ v obore celých nezáporných čísel ako riešenia iba tieto dvojice (a, b): $(0, 9)$, $(4, 6)$, $(8, 3)$ a $(12, 0)$. Zistíme ďalej, či pre jednotlivé dvojice (a, b) je príslušné vydláždenie daného štvorca možné.

(i) 9 dlaždíc B. Vysvetlíme, prečo také vydláždenie neexistuje. Ofarbime jednotkové štvorčeky celého štvorca ako zvyčajnú šachovnicu. Získame 18 čiernych a 18 bielych „políčok“. Každá dlaždica B pokrýva tri políčka jednej farby a jedno políčko druhej farby. Pripusťme, že celý štvorec pokrýva 9 dlaždíc B, pritom práve x z nich má tú vlastnosť, že pokrývajú po 3 čierne políčka, takže $9-x$ z nich má tú vlastnosť, že pokrývajú po 1 čiernom políčku. Pre celkový počet čiernych políčok potom platí rovnosť $18 = 3x + (9-x)$, odkiaľ $x = 9/2$, čo je spor.

(ii) 4 dlaždice A a 6 dlaždíc B. Možné riešenie vidno na obr. 4.

(iii) 8 dlaždíc A a 3 dlaždice B. Možné riešenie vidno na obr. 5.

(iv) 12 dlaždíc A. Možné riešenie vidno na obr. 6.



Obr. 4 Obr. 5 Obr. 6

Poznámka. Uveďme ešte iný argument, prečo nemožno deviatimi dlaždicami B vyplniť uvažovaný štvorec. Dlaždica, ktorá pokrýva rohové políčko, môže byť umiestnená (až na súmernosť podľa uhlopriečky štvorca) jediným spôsobom, napr. tak ako dlaždica B v ľavom dolnom rohu štvorca na obr. 5. Potom ale dlaždica B, ktorá v takom prípade pokrýva druhé políčko zľava v dolnom riadku, musí byť v polohe ako na obrázku. Posledné dve políčka dolného riadku potom už jednou ani dvoma dlaždicami B pokryť nemožno.