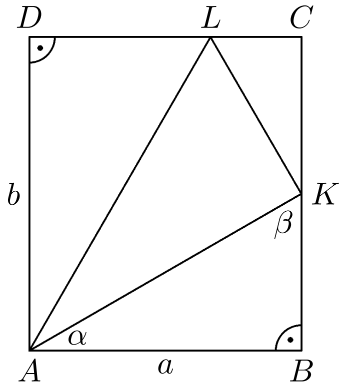
2003/2004
53. ročník MO *Riešenia úloh krajského kola kategórie C*

1. *V rovine je daný obdĺžnik $ABCD$, kde $|AB| = a < b = |BC|$. Na jeho strane BC existuje bod K a na strane CD bod L tak, že daný obdĺžnik je úsečkami AK, KL a LA rozdelený na štyri navzájom podobné trojuholníky. Určte hodnotu pomeru $a : b$.*
(*J. Švrček*)

Riešenie. V pravouhlom trojuholníku ABK označme $\alpha = |\measuredangle BAK|$, $\beta = |\measuredangle AKB| = 90^\circ - \alpha$ (obr. 1). Rovnaké vnútorné uhly 90°, α, β majú aj trojuholníky AKL a ADL,



Obr. 1

lebo sú podľa zadania s trojuholníkom ABK podobné. Všimnime si ich (ostré) uhly pri spoločnom vrchole A. Pretože $|\measuredangle KAD| = 90^\circ - \alpha = \beta$, sú oba uhly KAL a LAD menšie ako β, takže sa rovnajú uhlu α. Pravý uhol BAD je teda polpriamkami AK, AL rozdelený na tri zhodné uhly veľkosti α, odkiaľ $\alpha = 30^\circ$ (a $\beta = 60^\circ$). Z pravouhlých trojuholníkov ADL a ABK potom vyplýva, že $|AK| = |AB|/\cos 30^\circ = 2a/\sqrt{3}$ a $|AL| = |AD|/\cos 30^\circ = 2b/\sqrt{3}$. Odtiaľ vzhľadom na podmienku $a < b$ vyplýva nerovnosť $|AK| < |AL|$, teda preponou v trojuholníku AKL je AL (dlhšia z oboch strán AK, AL). Pre pomer dĺžok odvesny AK a prepony AL potom platí $\cos 30^\circ = |AK| : |AL| = a : b$, takže $a : b = \sqrt{3} : 2$.

Úlohu možno riešiť viacerými obmenenými postupmi, napríklad rozlíšiť dva prípady, keď trojuholník KAL má pravý uhol pri vrchole K respektíve L, a v každom z nich vyjadriť vnútorné uhly všetkých štyroch podobných trojuholníkov (v druhom prípade vtedy ale vyjde $a : b = 2 : \sqrt{3} > 1$, čo odporuje zadaniu úlohy).

2. *Nájdite všetky trojice prvočísiel p, q, r, pre ktoré platí*

$$\frac{14}{p} + \frac{51}{q} = \frac{65}{r}.$$

(*P. Novotný*)

Riešenie. Všimnime si najskôr, že pre čitatele zlomkov z danej rovnice platí vzťah $14 + 51 = 65$. Preto je riešením každá trojica rovnakých prvočísiel $p = q = r$ a navyše pre ľubovoľné riešenie platí: ak sú niektoré dve z čísel p, q, r rovnaké, je rovnaké aj tretie číslo. Budeme teda ďalej predpokladať, že prvočísla p, q, r spĺňajúce danú rovnicu sú navzájom rôzne (a teda navzájom nesúdeliteľné).

Po vynásobení rovnice súčinom pqr dostaneme

$$14qr + 51pr = 65pq,$$

odkiaľ vzhľadom na spomenutú nesúdeliteľnosť vyplýva

$$p \mid 14 = 2 \cdot 7, \quad q \mid 51 = 3 \cdot 17 \quad \text{a} \quad r \mid 65 = 5 \cdot 13.$$

To znamená, že $p \in \{2, 7\}$, $q \in \{3, 17\}$ a $r \in \{5, 13\}$. Teraz môžeme utvoriť a do rovnice dosadiť všetkých osem možných trojíc (p, q, r). Zistíme tak, že vyhovuje jedine trojica $(7, 17, 13)$.

Overenie dosadzovaním môžeme skrátiť tak, že vylúčime niektorú z hodnôt $p = 2$, $q = 3$, resp. $r = 5$. Napríklad po dosadení $r = 5$ dostaneme po vydelení piatimi rovnicu $14q + 51p = 13pq$, ktorá nemá celočíselné riešenie p ani pre $q = 3$ $(14 + 17p = 13p)$, ani pre $q = 17$ $(14 + 3p = 13p)$. Iná možnosť: z rovnice $14qr + 51pr = 65pq$ vyplýva $2p(q - r) = 7(2qr + 7pr - 9pq)$, takže súčin $p(q - r)$ je deliteľný siedmimi. Pretože však $q \in \{3, 17\}$ a $r \in \{5, 13\}$, nie je rozdiel $q - r$ deliteľný siedmimi, preto je siedmimi deliteľné číslo p. Podobne možno zdôvodniť, prečo $17 \mid q$ a $13 \mid r$.

Iné riešenie. Z danej rovnice vyjadríme r pomocou p a q:

$$r = \frac{65pq}{51p + 14q} = \frac{5 \cdot 13 \cdot p \cdot q}{51p + 14q}.$$

V ostatnom zlomku sme zvýraznili rozklad čitateľa na (štyri) prvočinitele. Taký zlomok bude rovný niektorému prvočíslu r práve vtedy, keď jeho menovateľ bude súčinom troch prvočiniteľov z čitateľa (iné krátenie zlomku nie je možné). Hľadáme teda situácie, keď platí niektorý z prípadov

$$\begin{aligned} 51p + 14q &= 5 \cdot 13 \cdot p \quad && \text{a} \quad r = q, \\ 51p + 14q &= 5 \cdot 13 \cdot q \quad && \text{a} \quad r = p, \\ 51p + 14q &= \ \ 5 \cdot p \cdot q \quad && \text{a} \quad r = 13, \\ 51p + 14q &= 13 \cdot p \cdot q \quad && \text{a} \quad r = 5. \end{aligned}$$

Jednoduchou úpravou rovníc zistíme, že prvé dva prípady nastanú iba v situácii, keď $p = q$ (vtedy tiež $p = r$). Posledné dva prípady vedú k vyjadreniam

$$q = \frac{3 \cdot 17 \cdot p}{5p - 14}, \quad \text{resp.} \quad q = \frac{3 \cdot 17 \cdot p}{13p - 14},$$

z ktorých analogickou úvahou o krátení zlomkov (prípad $p = q$ už môžeme vynechať) s prihliadnutím k zrejmým nerovnostiam $5p - 14 < 17p$ a $13p - 14 < 17p$ dostaneme rovnice

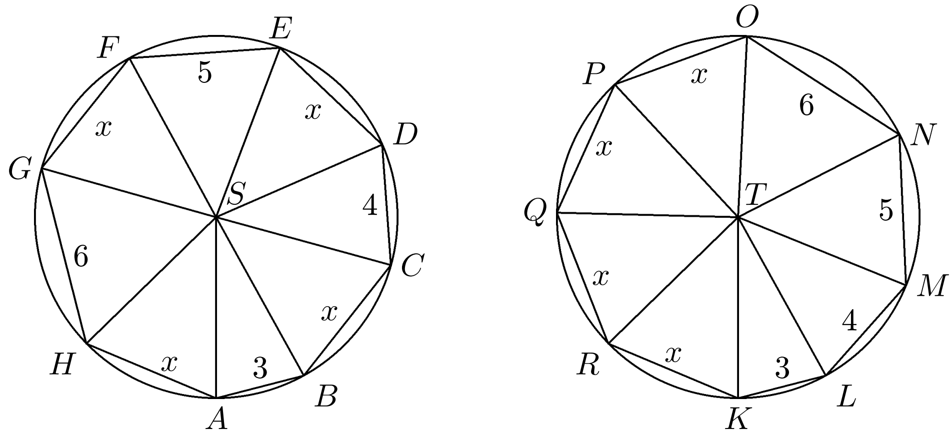
$$5p - 14 = 3p, \quad \text{resp.} \quad 13p - 14 = 3p.$$

Prvá rovnica má riešenie $p = 7$ (ktorému zodpovedá $q = 17$ a $r = 13$), druhá rovnica celočíselné riešenie nemá.

Odpoveď. Všetky riešenia (p, q, r) sú trojice (p, p, p), kde p je ľubovoľné prvočíslo a trojica $(7, 17, 13)$.

3. *Do kružnice s polomerom $r = 6$ vpíšte osemuholník $ABCDEFGH$, ktorého strany AB, CD, EF a GH majú postupne dĺžky 3, 4, 5 a 6 a strany BC, DE, FG a HA sú zhodné.* (*P. Novotný*)

Riešenie. *Rozbor*. Okrem hľadaného osemuholníka $ABCDEFGH$ uvažujme ešte pomocný osemuholník $KLMNOPQR$, ktorý je tiež vpísaný do kružnice s polomerom $r = 6$ a ktorého strany spĺňajú podmienky $|KL| = 3$, $|LM| = 4$, $|MN| = 5$, $|NO| = 6$, $|OP| = |PQ| = |QR| = |RK|$ (obr. 2). Označme S, resp. T stred kružnice s vpísaným



Obr. 2

osemuholníkom $ABCDEFGH$, resp. $KLMNOPQR$. Podľa vety *sss* platia zhodnosti

$$\Delta ABS \cong \Delta KLT, \quad \Delta CDS \cong \Delta LMT, \quad \Delta EFS \cong \Delta MNT, \quad \Delta GHS \cong \Delta NOT,$$

a preto sú zhodné stredové uhly ASB a KTL, CSD a LTM, ESF a MTN, GSH a NTO. Ďalej podľa vety *sss* sú zhodné trojuholníky BCS, DES, FGS a HAS, rovnako ako trojuholníky OPT, PQT, QRT a RKT. Zo zhodnosti ich uhlov pri hlavnom vrchole S, resp. T preto vyplýva

$$\begin{aligned}|\measuredangle BSC| &= \frac{1}{4}(360^\circ - |\measuredangle ASB| - |\measuredangle CSD| - |\measuredangle ESF| - |\measuredangle GSH|) = \\ &= \frac{1}{4}(360^\circ - |\measuredangle KTL| - |\measuredangle LTM| - |\measuredangle MTN| - |\measuredangle NTO|) = \\ &= |\measuredangle OTP|.\end{aligned}$$

Využili sme to, že stredy S a T sú *vnútorné* body oboch osemuholníkov (teda súčet všetkých ôsmich stredových uhlov je v oboch prípadoch 360°), lebo v opačnom prípade by jeden z ôsmich stredových uhlov bol rovný súčtu siedmich ostatných; musel by to byť uhol prislúchajúci tetive dĺžky 6, ten je však zrejme menší ako súčet uhlov prislúchajúcich tetivám dĺžok 3, 4 a 5. Trojuholníky BCS a OPT sú preto zhodné podľa vety *sus*, takže štvorice zhodných strán oboch osemuholníkov majú jednu spoločnú dĺžku. Ak teda dokážeme zostrojiť pomocný osemuholník $KLMNOPQR$, bude už konštrukcia osemuholníka $ABCDEFGH$ jednoduchá.

Konštrukcia. Na ľubovoľnej kružnici $t(T;6)$ zostrojíme v jednom smere body K, L, M, N a O tak, aby $|KL|=3$, $|LM|=4$, $|MN|=5$ a $|NO|=6$. Uhol KTO (ten, ktorý neobsahuje body L, M, N) potom rozdelíme na štyri zhodné diely: najskôr zostrojíme priesečník Q kružnice t s osou uhla KTO, potom priesečníky P, R kružnice t s osami uhlov OTQ resp. QTK. Potom pristúpime ku konštrukcii hľadaného osemuholníka $ABCDEFGH$: na kružnici $k(S,6)$ zvolíme bod A a na nej v jednom smere zostrojíme postupne body B, C, D, E, F, G, H tak, aby $|AB|=3$, $|BC|=|OP|$, $|CD|=4$, $|DE|=|OP|$, $|EF|=5$, $|FG|=|OP|$, $|GH|=6$.

Dôkaz správnosti. Zo zhodnosti siedmich dvojíc

$$\Delta ABS\cong\Delta KLT,\quad \Delta BCS\cong\Delta OPT,\quad \Delta CDS\cong\Delta LMT,\quad \Delta DES\cong\Delta QRT,$$
$$\Delta EFS\cong\Delta MNT,\quad \Delta FGS\cong\Delta QRT,\quad \Delta GHS\cong\Delta NOT$$

vyplýva zhodnosť uhlov HSA a RTK, a teda aj zhodnosť ôsmej dvojice trojuholníkov HAS a RKT. Preto majú dĺžky strán zostrojeného osemuholníka $ABCDEFGH$ (zhodné so stranami $KLMNOPQR$) všetky potrebné vlastnosti.

Poznámka. O osemuholníku $KLMNOPQR$ sme nemuseli v celom riešení vôbec hovoriť a mohli sme úvahy robiť nasledovne. Uhly zhodné so stredovými uhlami ASB, CSD, ESF, GSH dokážeme zostrojiť. Pre spoločnú veľkosť ω zhodných stredových uhlov BSC, DSE, FSG a HSA potom platí rovnica

$$4\omega+|\measuredangle ASB|+|\measuredangle CSD|+|\measuredangle ESF|+|\measuredangle GSH|=360^\circ, \qquad (1)$$

ktorú možno ľahko konštrukčne vyriešiť. Osemuholník $KLMNOPQR$ je však pre tento účel ideálnou pomôckou.

---

4. *Žiaci mali vypočítať príklad $x+y\cdot z$ pre trojciferné číslo x a dvojciferné čísla y, z. Martin vie násobiť a sčitovať čísla zapísané v desiatkovej sústave, ale zabudol na pravidlo prednosti násobenia pred sčitovaním. Preto mu vyšlo síce zaujímavé číslo, ktoré sa číta rovnako zľava doprava ako sprava doľava, ale správny výsledok bol o* 2004 *menší. Určte čísla x, y, z.* (J. Šimša)

Riešenie. Martin vypočítal hodnotu $(x+y)z$ namiesto $x+yz$, takže podľa zadania platí

$$(x+y)z-(x+yz)=2\,004,\quad \text{čiže}\quad x\cdot(z-1)=2\,004=12\cdot 167,$$

pričom 167 je prvočíslo. Činitele x a $z-1$ určíme, keď si uvedomíme, že z je dvojciferné číslo, takže $9\leqq z-1\leqq 98$. Vidíme, že nutne $z-1=12$ a $x=167$, odkiaľ $z=13$. Martin teda vypočítal číslo $V=(167+y)\cdot 13$. Číslo V je preto štvorciferné, a pretože sa číta spredu rovnako ako zozadu, má tvar $\overline{abba}=1\,001a+110b$. Pretože $1\,001=13\cdot 77$, musí platiť rovnosť $(167+y)\cdot 13=13\cdot 77a+110b$, z ktorej vyplýva, že číslica b je deliteľná trinástimi, takže $b=0$. Po dosadení dostaneme (po delení trinástimi) rovnosť $167+y=77a$, ktorá vzhľadom na nerovnosti $10\leqq y\leqq 99$ znamená, že číslica a sa rovná 3, takže $y=64$.

V druhej časti riešenia sme mohli postupovať aj nasledovne. Pre číslo $V=(167+{}$ $+y)\cdot 13$ vychádzajú z nerovností $10\leqq y\leqq 99$ odhady $2\,301\leqq V\leqq 3\,458$. Zistíme preto, ktoré z čísel $\overline{2bb2}$, kde $b\in\{3,4,5,6,7,8,9\}$ a čísel $\overline{3bb3}$, kde $b\in\{0,1,2,3,4\}$, sú deliteľné trinástimi. Aj keď sa týchto dvanásť čísel dá rýchlo otestovať, urobme to všeobecne ich čiastočným vydelením trinástimi:

$$\begin{aligned}\overline{2bb2} &= 2\,002 + 110b = 13 \cdot (154 + 8b) + 6b,\\ \overline{3bb3} &= 3\,003 + 110b = 13 \cdot (231 + 8b) + 6b.\end{aligned}$$

Vidíme, že vyhovuje jedine číslo $\overline{3bb3}$ pre $b = 0$. Vtedy $167 + y = 231$, takže $y = 64$.

Odpoveď. Žiaci mali počítať príklad $167 + 64 \cdot 13$, teda $x = 167$, $y = 64$ a $z = 13$.