67. ročník Matematickej olympiády
2017/2018 *Riešenia úloh školského kola kategórie B*

---

1. *Uveďte príklad mnohočlena najnižšieho možného kladného stupňa, ktorý po delení ako mnohočlenom $x^2 - 4$, tak mnohočlenom $x^3 - 8x + 8$ dáva zvyšok* 1. (Ján Mazák)

Riešenie. Označme P hľadaný mnohočlen. Výsledky jeho delenia oboma danými mnohočlenmi znamenajú, že pre vhodné mnohočleny A a B platia rovnosti

$$P(x) = A(x)(x^2 - 4) + 1 \quad \text{a} \quad P(x) = B(x)(x^3 - 8x + 8) + 1.$$

Pritom A a B nie sú nulové mnohočleny, lebo P musí mať podľa zadania kladný stupeň, ktorý je tak aspoň 3.

Porovnaním pravých strán dostaneme rovnosť mnohočlenov

$$A(x)(x^2 - 4) = B(x)(x^3 - 8x + 8).$$

Medzi korene mnohočlena na ľavej strane určite patria čísla $x = 2$ a $x = -2$, z ktorých iba prvé je koreňom kubického činiteľa $x^3 - 8x + 8$ na pravej strane (to ľahko zistíme dosadením). Preto $x = -2$ musí byť koreňom mnohočlena B, ktorý tak má stupeň aspoň jedna, teda hľadaný mnohočlen P má stupeň aspoň 4. Navyše P bude mať stupeň štyri práve vtedy, keď zodpovedajúce B bude tvaru $B(x) = a(x + 2)$ pre vhodné číslo $a \neq 0$. (Zodpovedajúce $A(x) = a(x^3 - 8x + 8)/(x - 2)$ nie je nutné počítať, napriek tomu ho uveďme: $A(x) = a(x^2 + 2x - 4)$.)

Všetky mnohočleny P vyhovujúce podmienkam úlohy tak sú tvaru

$$P(x) = \underbrace{a(x + 2)}_{B(x)}(x^3 - 8x + 8) + 1 = a(x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 8x + 16) + 1.$$

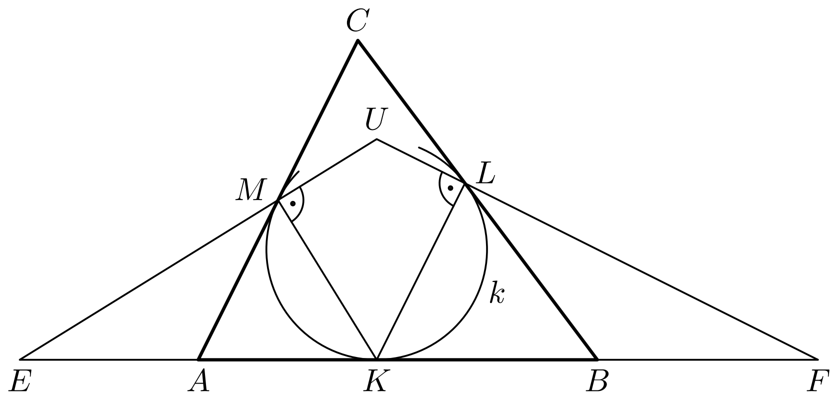
(Skúška pri uvedenom postupe nie je nutná, pre úplné riešenie stačilo uviesť jeden príklad, napríklad voľbou $a = 1$.)

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za vytvorenie potrebnej rovnosti dajte 2 body. Za dôkaz, že hľadaný mnohočlen má stupeň aspoň 4, dajte 3 body. Za dokončenie riešenia dajte 1 bod.

---

2. *Daný je trojuholník ABC s vpísanou kružnicou k. Jej dotykové body na stranách AB, BC, CA označme postupne K, L, M. Nech E, F sú postupne obrazy bodu K v stredových súmernostiach podľa stredov A a B. Priesečník priamok EM a FL označme U. Dokážte, že bod U leží na kružnici k a že priamky UK a AB sú navzájom kolmé.*
(Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf)

Riešenie. Z rovnosti prislúchajúcich úsekov dotyčníc ku kružnici k vyplýva $|AM| = |AK|$ a $|BL| = |BK|$, preto $|AM| = |AK| = |AE|$ a $|BL| = |BK| = |BF|$ (obr. 1). To ale znamená, že bod A je stredom kružnice opísanej trojuholníku EKM a podobne bod B stredom kružnice opísanej trojuholníku KFL.



Obr. 1

Podľa Tálesovej vety z toho vyplýva, že trojuholníky EKM a KFL sú oba pravouhlé s pravými uhlami pri vrcholoch M a L. Preto

$$|\measuredangle KMU| + |\measuredangle KLU| = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

čo znamená, že $MKLU$ je tetivový štvoruholník. Bod U teda leží na kružnici k opísanej trojuholníku MKL.

Navyše je úsečka UK priemerom kružnice k, a keďže strana AB sa jej v bode K dotýka, je priemer UK kolmý na AB.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za dôkaz, že uhly EKM a KFL sú pravé, dajte 3 body a ďalší bod za odvodenie, že bod U leží na kružnici k. Za dôkaz, že priamky UK a AB sú navzájom kolmé, dajte 2 body.

---

3. *Číslo* 2 018 *sme rozložili na súčet niekoľkých prirodzených čísel a ich tretie mocniny sčítali. Aké zvyšky môže tento súčet dávať po delení šiestimi?* (*Vojtech Bálint*)

Riešenie. Pre každé prirodzené číslo n platí $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$. Keďže súčin troch po sebe idúcich prirodzených čísel je deliteľný šiestimi, je číslo $n^3 - n$ deliteľné šiestimi pre každé prirodzené číslo n.

Ak je číslo 2 018 vyjadrené ako súčet niekoľkých prirodzených čísel,

$$2\,018 = x_1 + \ldots + x_k,$$

môžeme pre zodpovedajúci súčet T tretích mocnín písať

$$\begin{aligned} T &= x_1^3 + \ldots + x_k^3 = \\ &= (x_1^3 - x_1) + \ldots + (x_k^3 - x_k) + (x_1 + \ldots + x_k) = \\ &= (x_1^3 - x_1) + \ldots + (x_k^3 - x_k) + 2\,018 = \\ &= 6t + 6 \cdot 336 + 2, \end{aligned}$$

takže číslo T dáva bez ohľadu na spôsob rozkladu čísla 2 018 po delení šiestimi vždy zvyšok 2.

Poznámka. Riešenie možno podať stručnejšie, ak ovládame základy číselných kongruencií. Vieme potom, že tvrdenie o rovnakom zvyšku čísel n^3 a n po delení šiestimi možno dokázať pre všeobecné n tak, že ho numericky overíme iba pre $n \in \{0,1,2,3,4,5\}$. Potom už je jasné, že aj čísla

$$2\,018 = x_1 + \ldots + x_k \quad \text{a} \quad x_1^3 + \ldots + x_k^3$$

dávajú po delení šiestimi rovnaký zvyšok. A číslo 2 018 dáva po delení šiestimi zvyšok 2.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za akékoľvek zdôvodnenie, že prirodzené číslo a jeho tretia mocnina dávajú po delení šiestimi rovnaký zvyšok, dajte 2 body. Za zdôvodnenie, že čísla $x_1 + \ldots + x_k$ a $x_1^3 + \ldots + x_k^3$ dávajú po delení šiestimi rovnaký zvyšok, dajte ďalšie 2 body. Za dokončenie riešenia dajte zvyšné 2 body.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe do 15. februára.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný, Patrik Bak
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018