2002/2003
52. ročník MO *Riešenia úloh domáceho kola kategórie A*

1. *Postupnosť celých čísel* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *s prvým členom* $x_1 = 1$ *spĺňa podmienku*

$$x_n = \pm x_{n-1} \pm \cdots \pm x_1$$

s vhodnou voľbou znamienok „+“ a „−“ pre ľubovoľné $n > 1$*, napríklad* $x_2 = -x_1$*,* $x_3 = -x_2 + x_1$*,* $x_4 = x_3 - x_2 - x_1$*, … Pre dané* n *určte všetky možné hodnoty* x_n*.*
(*J. Földes*)

Riešenie. Vypíšme, aké hodnoty môžu nadobúdať prvé členy uvedenej postupnosti. Dostaneme

$$x_1 = 1, \quad x_2 \in \{-1, 1\}, \quad x_3 \in \{-2, 0, 2\}, \quad x_4 \in \{-4, -2, 0, 2, 4\},$$
$$x_5 \in \{-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\}.$$

Všimnime si, že všetky členy, ktoré sme vypísali, sú celé čísla. Ďalej je zrejmé, že pre $i > 2$ je každý člen x_i párne číslo. (Ďalšie pozorovanie je, že ak nájdeme postupnosť, pre ktorú $x_i = a$ pre nejaké číslo a a dané $i > 1$, tak existuje aj postupnosť, pre ktorú $x_i = -a$.)

Zistime, akú najväčšiu a akú najmenšiu hodnotu môže nadobúdať číslo x_n (v závislosti od n). Označme a_i najväčšiu hodnotu, ktorú môže nadobúdať člen x_i. Pretože postupností dĺžky i spĺňajúcich dané vlastnosti je len konečný počet, maximum a_i existuje a je zrejme kladné. K číslu a_i musí pre každé $i > 1$ existovať postupnosť $x_1, \dots, x_{i-1}$, pre ktorú platí

$$a_i = \pm x_{i-1} \pm \ldots \pm x_1 \leqq |x_{i-1}| + \ldots + |x_1| \leqq a_{i-1} + \ldots + a_1. \tag{1}$$

Vieme, že $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$. Pomocou predchádzajúceho vzťahu dokážme, že $a_i = 2^{i-2}$ pre každé $i > 1$. Dôkaz urobíme matematickou indukciou vzhľadom na i.

1^0 Tvrdenie platí pre $i = 1$ ($a_1 = 1$) a $i = 2$ ($a_2 = 1$).

2^0 Predpokladajme, že tvrdenie platí pre každé k, $2 \leqq k \leqq i - 1$, a dokážme, že tvrdenie platí aj pre $k = i$. Z odhadu (1), indukčného predpokladu a vzorca pre súčet geometrického radu dostaneme

$$a_i \leqq a_{i-1} + \ldots + a_1 = 2^{i-3} + \ldots + 2 + 1 + 1 = \frac{2^{i-2} - 1}{2 - 1} + 1 = 2^{i-2}.$$

Uvažujme postupnosť $x_1 = 1$ a $x_i = x_{i-1} + \ldots + x_1$ pre každé $i > 1$. V tomto prípade bude podľa predchádzajúceho platiť $x_i = 2^{i-2}$, takže $a_i = 2^{i-2}$ pre každé $i > 1$.

Podobne dokážeme, že najmenšia hodnota, akú môže x_n nadobudnúť, je -2^{n-2}.

Zistili sme, že pre každé $n > 1$ leží člen x_n ľubovoľnej uvažovanej postupnosti v množine $\{-2^{n-2}, -2^{n-2} + 2, -2^{n-2} + 4, \dots, 2^{n-2}\}$, ktorú označíme M_n. Dokážme nakoniec, že x_n môže pre $n > 1$ nadobúdať ľubovoľnú hodnotu z množiny M_n.

Voľme znamienka nasledujúcim spôsobom: $x_i = x_{i-1} + \ldots + x_1$ pre $i < n$. Pre takú postupnosť platí $x_i = 2^{i-2}$ pre $1 < i < n$. Dokážme, že v rovnosti $x_n = \pm 2^{n-3} \pm \pm 2^{n-2} \pm \ldots \pm 1 \pm 1$ možno znamienka vybrať tak, aby sa hodnota x_n rovnala ľubovoľne zvolenému číslu z množiny M_n. Dôkaz urobíme opäť matematickou indukciou.

1^0 Tvrdenie platí pre $n = 2$ ($-1 = -x_1$ a $1 = +x_1$, lebo $x_1 = 1$) a $n = 3$ ($-2 = -1 - 1$, $0 = -1 + 1$, $2 = 1 + 1$).

2^0 Predpokladajme, že tvrdenie platí pre $k \leqq n - 1$, kde $n \geqq 4$. Dokážme tvrdenie pre $k = n$. Zvoľme ľubovoľné číslo a z množiny M_n. Dokážeme, že existuje taká voľba znamienok + a −, že $a = \pm 2^{n-3} \pm 2^{n-4} \pm \ldots \pm 1 \pm 1$. Rozoberieme dve možnosti.

1. $a \geqq 0$. Pretože $a \in \mathsf{M}_n$, je $a - 2^{n-3}$ párne celé číslo z intervalu $\langle -2^{n-3}, 2^{n-3} \rangle$, a teda $a - 2^{n-3} \in \mathsf{M}_{n-1}$. Z indukčného predpokladu vyplýva, že existuje voľba znamienok + a − taká, že $a - 2^{n-3} = \pm 2^{n-4} \pm 2^{n-5} \pm \ldots \pm 1 \pm 1$. Potom $a = 2^{n-3} \pm 2^{n-4} \pm 2^{n-5} \pm \ldots \pm 1 \pm 1$, čo sme chceli dokázať.

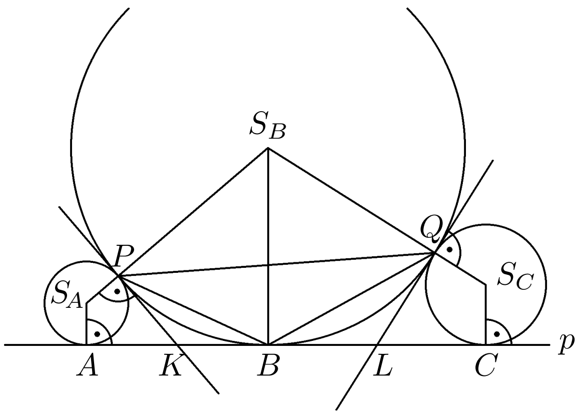
2. $a < 0$. Podobne ako v predchádzajúcom prípade dokážeme, že a sa dá napísať v tvare $a = -2^{n-3} \pm 2^{n-4} \pm 2^{n-5} \pm \ldots \pm 1 \pm 1$.

Tým sme dokázali, že všetky hodnoty x_n tvoria práve množinu M_n.

---

2. *Na priamke p sú dané rôzne body A, B, C v tomto poradí, kde $|AB| = 1$ a $|BC| = h$. Uvažujme kružnice k_A, k_B, k_C, ktoré sa dotýkajú priamky p postupne v bodoch A, B, C. Kružnice k_A, k_B majú pritom vonkajší dotyk v bode P a kružnice k_B, k_C majú vonkajší dotyk v bode Q. Určte všetky také hodnoty polomeru kružnice k_B, pre ktoré je trojuholník BPQ rovnoramenný.* (J. Zhouf)

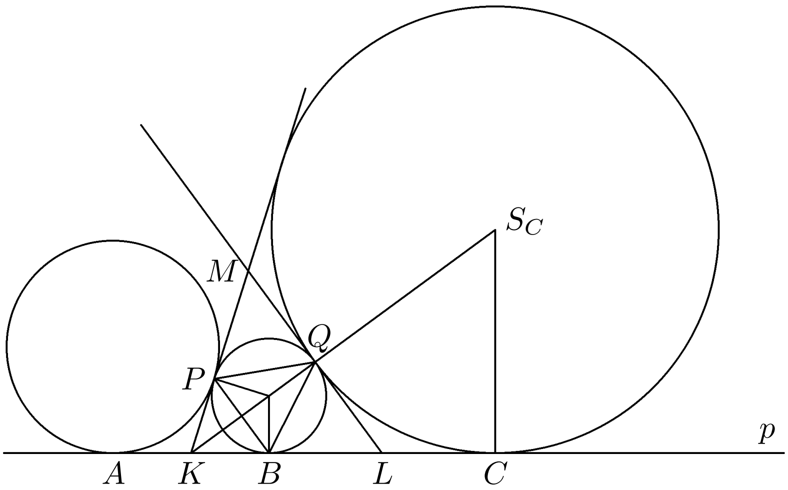
Riešenie. Keď zvolíme veľkosť $r_B > 0$ polomeru kružnice k_B, sú už tým obe ďalšie kružnice k_A, k_C určené. K ich zostrojeniu využijeme základné vlastnosti dotyčníc kružníc. Predpokladajme, že kružnice k_A, k_B, k_C majú vlastnosti popísané v zadaní. Ak označíme napr. K priesečník vnútornej spoločnej dotyčnice kružníc k_A a k_B (v bode P ich vonkajšieho dotyku) s priamkou p, ktorá je spoločnou vonkajšou dotyčnicou všetkých troch kružníc, musia byť $|KA| = |KP|$ a $|KB| = |KP|$ (obr. 1). To znamená, že bod K je stredom úsečky AB a súčasne bod P leží na Tálesovej kružnici nad priemerom AB. Keď poznáme bod P, ľahko už zostrojíme kružnicu k_A, o ktorej vieme, že sa dotýka priamky p v bode A. Analogicky zostrojíme kružnicu k_C.



Obr. 1

Máme zistiť, pre ktoré hodnoty r_B je trojuholník BPQ rovnoramenný. Pretože body dotyku P, Q kružnice k_B s oboma susednými kružnicami ležia vnútri opačných polrovín určených priamkou BS_B, sú oba uhly BPQ a BQP ostré (príslušné stredové uhly sú menšie ako 180°). Ak teda náhodou vyjde trojuholník PBQ tupouhlý, môže byť rovnoramenný, len keď $|BP| = |BQ|$. V takom prípade je ale zo súmernosti zrejmé, že $|AB| = |BC|$, t. j. $h = 1$. Trojuholník BPQ je potom rovnoramenný pre každé $r_B > 0$.

Predpokladajme ďalej, že $h \neq 1$. V takom prípade môžeme predpokladať, že trojuholník BPQ je ostrouhlý (inak podľa predchádzajúceho odstavca nemôže byť rovnoramenný). Ak je rovnoramenný, buď $|PQ| = |BQ|$, alebo $|PQ| = |BP|$. Predpokladajme, že napr. $|PQ| = |BQ|$ (ako ukážeme neskôr, druhý prípad možno riešiť využitím súmernosti). Trojuholník BPQ je súmerný podľa spojnice S_BS_C stredov oboch kružníc, ktorá prechádza bodom dotyku Q oboch kružníc a priesečníkom K dotyčníc KB, KP. Označme ešte L priesečník spoločnej vnútornej dotyčnice kružníc k_C a k_B s priamkou p (L je stred úsečky BC, obr. 2) a M priesečník oboch dotyčníc KP a LQ (ten je obrazom bodu L v uvedenej osovej súmernosti). Trojuholník KLM



Obr. 2

je teda rovnoramenný so stranami $|KL| = |KM| = (1+h)/2$, $|ML| = 2|LQ| = h$, jeho obvod je $1 + 2h$. Veľkosť polomeru r_B vpísanej kružnice vypočítame pomocou obsahu. Pre obsah S trojuholníka KLM platí

$$S = \frac{1}{2}h\sqrt{\left(\frac{1+h}{2}\right)^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}h\sqrt{1+2h}$$

a súčasne

$$S = \frac{1}{2}r_B(1+2h).$$

Odtiaľ vychádza

$$r_B = \frac{h}{2\sqrt{2h+1}}. \tag{1}$$

Ak je naopak r_B dané vzťahom (1), môžeme zostrojiť rovnoramenný trojuholník KLM s ramenami KL a KM dĺžky $(1+h)/2$ a základňou ML, $|ML| = h$, pričom jeho vpísaná kružnica k_B sa bude dotýkať ramena KL v bode B. Označme P, Q postupne body dotyku kružnice k_B so stranami KM a LM. Pretože K je stred úsečky AB, platí $|KA| = |KB| = |KP|$. To znamená, že kružnica k_A dotýkajúca sa priamky p v bode A a prechádzajúca bodom P sa bude dotýkať kružnice k_B v bode P. Analogicky zostrojíme aj kružnicu k_C dotýkajúcu sa priamky p v bode C a prechádzajúcu bodom Q.

Zo súmernosti trojuholníka KLM podľa priamky KQ vyplýva, že $|PQ| = |BQ|$. Tým je prvý prípad vyriešený.

V prípade rovnosti $|PQ| = |BP|$ môžeme postupovať úplne rovnako. Jednoduchšie ale bude, keď zmeníme mierku pôvodného obrázku v pomere $1 : h$, takže bude $|AB| = h' = 1/h$, $|BC| = 1$. Keď naviac vymeníme označenie bodov A a C, tak sa z rovnosti $|BP| = |PQ|$ stane rovnosť $|BQ| = |PQ|$. Podľa predchádzajúceho potom pre veľkosť polomeru $r'_B = (1/h)r_B$ dostaneme

$$\frac{1}{h}r_B = r'_B = \frac{h'}{2\sqrt{2h'+1}} = \frac{\frac{1}{h}}{2\sqrt{2\frac{1}{h}+1}},$$

t. j.

$$r_B = \frac{h}{2\sqrt{2h+h^2}}. \tag{2}$$

Alebo sme mohli riešiť úlohu o niečo všeobecnejšie za predpokladu $|AB| = a$, $|BC| = b$, potom by sme namiesto vzťahu (1) dostali

$$r_B = \frac{b\sqrt{a^2+2ab}}{2(a+2b)}. \tag{1'}$$

Pre $a = 1$, $b = h$ vyjde za predpokladu $|PQ| = |BQ|$ pôvodný vzťah (1), zatiaľ čo pre $|PQ| = |BP|$ vymeníme označenie bodov A, C (a tým aj bodov P, Q) a do vzťahu (1′) dosadíme $a = h$, $b = 1$. Dostaneme tak vzťah (2).

Záver. Pre $h = 1$ je trojuholník BPQ rovnoramenný pre ľubovoľné $r_B > 0$. Pre $h \neq 1$ je trojuholník BPQ rovnoramenný pre r_B určené vzťahom (1) ($|PQ| = |BQ|$) alebo pre r_B určené vzťahom (2) ($|PQ| = |BP|$).

---

3. *Určte všetky možné hodnoty výrazu*

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2},$$

kde a, b, c sú dĺžky strán trojuholníka. (P. Kaňovský)

Riešenie. Najprv ukážeme, že žiadna hodnota skúmaného výrazu V nie je menšia ako 1. Použijeme nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom ($x + y \geqq 2\sqrt{xy}$) pre všetky dvojice kladných čísel x, y z množiny $\{a^4, b^4, c^4\}$.

$$V = \frac{a^4+b^4+c^4}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a^4+b^4)+(b^4+c^4)+(c^4+a^4)}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2} \geqq$$
$$\geqq \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot (a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2} = 1.$$

Teraz ukážeme, že každá hodnota V je menšia ako 2. Z Herónovho vzorca pre obsah S trojuholníka so stranami a, b, c vieme, že

$$S^2 = s(s-a)(s-b)(s-c),$$

kde $s = (a+b+c)/2$. Po dosadení za s a roznásobení dostaneme

$$0 < 16S^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2.$$

Odtiaľ

$$a^4 + b^4 + c^4 < 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2, \quad \text{t. j.} \quad \frac{a^4+b^4+c^4}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} < 2.$$

Zhrňme výsledok úvah prvých dvoch odstavcov. Zistili sme, že $V \in \langle 1, 2)$. Ukážme, že všetky hodnoty V zaplnia celý interval $V \in \langle 1, 2)$. Zvolíme ľubovoľnú hodnotu $k \in \in \langle 1, 2)$ a nájdeme trojuholník, pre ktorý má výraz V hodnotu k. Uvažujme trojuholník so stranami a, 1, 1, ktorý podľa trojuholníkovej nerovnosti existuje práve vtedy, keď $0 < a < 2$. Zistíme, pre ktoré a platí $V = k$, preto vyriešime rovnicu

$$\frac{a^4+2}{2a^2+1} = k \tag{1}$$

s neznámou a. Po substitúcii $a^2 = b$ dostaneme kvadratickú rovnicu $b^2 - 2kb + 2 - k = 0$ s neznámou b. Jej diskriminant je rovný $D = 4k^2 - 4(2-k) = 4(k^2+k-2)$. Na to, aby mala rovnica riešenie, musí byť diskriminant nezáporný, teda musí platiť $k^2 + k - 2 \geqq 0$. Táto nerovnosť je splnená pre $k \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 1, \infty)$, teda aj pre uvažované $k \in \langle 1, 2)$. Potrebujeme ešte dokázať, že skúmaná rovnica má aspoň jeden koreň b v intervale $(0, 4)$, lebo $b = a^2$ a $a \in (0, 2)$. Všimnime si, že pre oba korene $b_{1,2}$ platí

$$\begin{aligned} b_{1,2} = \frac{2k \pm 2\sqrt{k^2+k-2}}{2} &= k \pm \sqrt{k^2+k-2} \leqq \\ &\leqq k + \sqrt{k^2+k-2} < k + \sqrt{k^2} = 2k < 4, \end{aligned}$$

pričom sme využili nerovnosť $k < 2$. Na druhej strane pre koreň b_1 (so znamienkom + pred $\sqrt{D}$) platí

$$b_1 = k + \sqrt{k^2+k-2} \geqq k > 0.$$

Tým sme ukázali, že $0 < b_1 < 4$. Existuje teda číslo $a = \sqrt{b_1}$ spĺňajúce rovnicu (1).

Iné riešenie. Opakovaným dosadzovaním dĺžok strán konkrétnych trojuholníkov dospejeme k hypotéze, že $1 \leqq V < 2$. Dokazujme najprv dolný odhad $1 \leqq V$, ktorý je ekvivalentný s nerovnosťou

$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \leqq a^4 + b^4 + c^4.$$

Je to bikvadratická nerovnica s premennou a, takže po substitúcii $a^2 = t$ dostaneme kvadratickú nerovnicu

$$0 \leqq t^2 - t(b^2+c^2) + b^4 + c^4 - b^2c^2. \tag{2}$$

Jej diskriminant je $D = (b^2+c^2)^2 - 4(b^4+c^4-b^2c^2) = -3(b^4+c^4-2b^2c^2) = -3(b^2 - -c^2)^2 \leqq 0$. Pretože naviac je koeficient pri t^2 na pravej strane (2) kladný, je nerovnica (2) splnená pre všetky reálne čísla b, c a t. Tým je nerovnosť $V \geqq 1$ dokázaná.

Prejdeme k nerovnosti $V < 2$. Danú nerovnicu prenásobme kladným menovateľom, dostaneme

$$2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) > a^4 + b^4 + c^4.$$

Je to opäť bikvadratická nerovnica s premennou a. Po substitúcii $t = a^2$ prejde nerovnica do tvaru $t^2 - 2t(b^2 + c^2) + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 < 0$. Jej diskriminant je $D = 4(b^2 + c^2)^2 - 4(b^4 + c^4 - 2b^2c^2) = 16b^2c^2$. Pretože koeficient pri t^2 je kladný, je riešením tejto nerovnice interval určený nerovnosťami

$$\frac{2(b^2 + c^2) - \sqrt{D}}{2} < t < \frac{2(b^2 + c^2) - \sqrt{D}}{2},$$

čiže

$$(b - c)^2 < t < (b + c)^2.$$

Tieto nerovnosti platia, pretože $t = a^2$ a $|b - c| < a < b + c$ podľa trojuholníkových nerovností. Tým je nerovnosť $V < 2$ dokázaná.

Že hodnoty V zaplnia celý interval $\langle 1, 2)$, dokážeme rovnako ako v prvom riešení.

Iný dôkaz nerovnosti $V < 2$. Vyjdeme z trojuholníkovej nerovnosti $|a - b| < c < a + b$. Po umocnení na druhú a následnej úprave dostaneme $-2ab < c^2 - a^2 - b^2 < 2ab$, t. j. $|c^2 - a^2 - b^2| < 2ab$. Po ďalšom umocnení na druhú dostaneme

$$c^4 + b^4 + a^4 - 2c^2a^2 - 2c^2b^2 + 2a^2b^2 < 4a^2b^2,$$

čiže

$$c^4 + b^4 + a^4 < 2c^2a^2 + 2c^2b^2 + 2a^2b^2.$$

Odtiaľ už vyplýva, že $V < 2$.

Poznámky. Všimnime si, že podobné trojuholníky majú rovnakú hodnotu výrazu V. Skutočne, ak a, b, c sú strany trojuholníka, sú ka, kb, kc pre každé reálne $k > 0$ stranami podobného trojuholníka a platí

$$\frac{(ka)^4 + (kb)^4 + (kc)^4}{(ka)^2(kb)^2 + (ka)^2(kc)^2 + (kb)^2(kc)^2} = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}.$$

To znamená, že bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $c = 1$. Máme teda skúmať obor hodnôt výrazu

$$\frac{a^4 + b^4 + 1}{a^2b^2 + a^2 + b^2}$$

za predpokladu $|a - b| < 1 < a + b$, čo zjednodušuje a sprehľadňuje výpočty.

V druhej časti riešenia sme mali zistiť obor hodnôt funkcie $f(a) = (a^4 + 2)/(2a^2 + 1)$. Zrejme $f(1) = 1$ a $f(0) = 2$. Zo spojitosti funkcie f vyplýva, že na intervale $(0, 1\rangle$ nadobúda všetky hodnoty z intervalu $\langle 1, 2)$.

Dôkladným rozborom uvedených dôkazov zistíme, že nerovnosť $V \geqq 1$ platí pre všetky reálne čísla a, b, c, z ktorých aspoň dve sú nenulové.

4. *Určte všetky prirodzené čísla $n > 1$ také, že v niektorej číselnej sústave so základom $z \geqq 5$ platí nasledovné kritérium deliteľnosti: Trojmiestne číslo $(abc)_z$ je deliteľné číslom n práve vtedy, keď je číslom n deliteľné číslo $c + 3b - 4a$.* (P. Černek)

Riešenie. Pretože $(abc)_z$ je číslo $az^2 + bz + c$, máme zistiť, kedy všeobecne platí ekvivalencia $n \mid c + 3b - 4a$, práve vtedy, keď $n \mid az^2 + bz + c$. V nej sú a, b, c ľubovoľné číslice pri základe z, t. j. čísla z množiny $\{0, 1, \dots, z - 1\}$. Všimnime si, že $z - 1 \geqq 4$, lebo predpokladáme, že $z \geqq 5$.

Keď zvolíme $a = b = c = 1$, dostaneme, že $n \mid 0$ práve vtedy, keď $n \mid z^2 + z + 1$. Pretože nula je deliteľná každým celým číslom, musí platiť $n \mid z^2 + z + 1$. Keď zvolíme $a = 1$, $b = 0$ a $c = 4$, dostaneme, že $n \mid 0$ práve vtedy, keď $n \mid z^2 + 4$. Podobnou úvahou ako vyššie zistíme, že $n \mid z^2 + 4$. Ak nejaké číslo delí dve čísla, musí deliť aj ich najväčší spoločný deliteľ, teda $n \mid \mathrm{nsd}(z^2 + 4, z^2 + z + 1)$. Tento spoločný deliteľ nájdeme pomocou Euklidovho algoritmu.

$$\begin{aligned} &\mathrm{nsd}(z^2+4, z^2+z+1) = \\ &\quad = \mathrm{nsd}\big(z^2+4, z^2+z+1-(z^2+4)\big) = \mathrm{nsd}(z^2+4, z-3) = \\ &\quad = \mathrm{nsd}\big(z^2+4-z(z-3), z-3\big) = \mathrm{nsd}(4+3z, z-3) = \\ &\quad = \mathrm{nsd}\big(4+3z-3(z-3), z-3\big) = \mathrm{nsd}(13, z-3). \end{aligned}$$

Zistili sme, že $n \mid 13$. Pretože $n > 1$, nutne $n = 13$. Ak má niektoré n požadovanú vlastnosť, je to nutne číslo $n = 13$. Dokážme, že číslo 13 skutočne danú vlastnosť má. Odvodená nutná podmienka $n \mid \mathrm{nsd}(13, z - 3)$ je pre $n = 13$ splnená napr. pre $z = 16$. Daná ekvivalencia má potom tvar $13 \mid c + 3b - 4a$ práve vtedy, keď $13 \mid a \cdot 16^2 + b \cdot 16 + c$. Dokážeme silnejšiu vlastnosť, že totiž čísla $a \cdot 16^2 + b \cdot 16 + c$ a $c + 3b - 4a$ dávajú po delení trinástimi rovnaký zvyšok, teda že ich rozdiel je deliteľný trinástimi.

$$(a \cdot 16^2 + b \cdot 16 + c) - (c + 3b - 4a) = 260a + 13b = 13(20 + b).$$

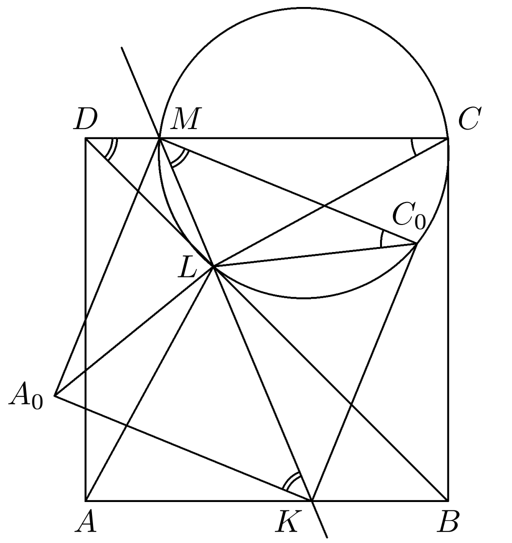
Úloha má jediné riešenie $n = 13$.

Poznámka. Podobne ako v závere riešenia môžeme dokázať, že uvedené kritérium deliteľnosti pre $n = 13$ platí aj v ľubovoľnej číselnej sústave so základom $z = 13k + 3$.

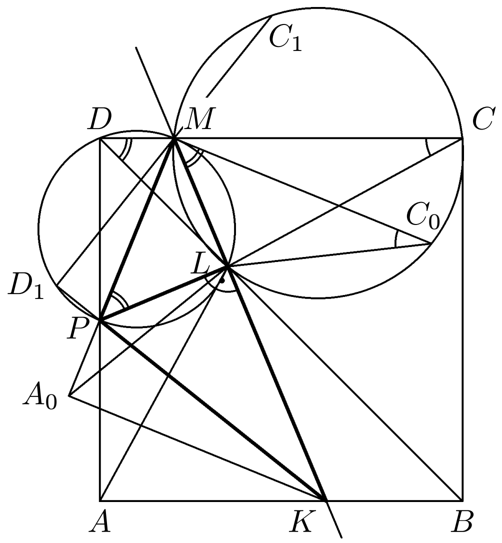
5. *V rovine sú dané tri rôzne body K, L, M, ktoré v tomto poradí ležia na priamke. V tejto rovine nájdite množinu všetkých vrcholov C štvorcov $ABCD$ takých, že bod K leží na strane AB, bod L na uhlopriečke BD a bod M na strane CD.* (J. Šimša)

Riešenie. Ak je $ABCD$ ľubovoľný štvorec, ktorý spĺňa podmienky úlohy, bude rovnakým podmienkam vyhovovať aj štvorec, ktorý dostaneme osovou súmernosťou podľa priamky MK. Hľadaná množina bude teda osovo súmerná podľa tejto priamky a nám stačí určiť tú jej časť, ktorá leží v jednej z oboch polrovín s hraničnou priamkou MK.

Okrem ľubovoľného štvorca $ABCD$, ktorý spĺňa podmienky úlohy, uvažujme štvorec $A_0B_0C_0D_0$ s uhlopriečkou $B_0D_0 = KM$ ($B_0 \equiv K$, $D_0 \equiv M$), pričom vrchol C_0 leží v rovnakej polrovine ohraničenej priamkou KM ako vrchol C štvorca $ABCD$ (obr. 3). (Vrchol C_0 zrejme rovnako patrí do hľadanej množiny.)



Obr. 3



Obr. 4

Pretože trojuholníky KLB a MLD sú podobné podľa vety uu, delí bod L uhlopriečky oboch štvorcov v rovnakom pomere

$$|BL| : |LD| = |KL| : |LM| = \text{konšt.}$$

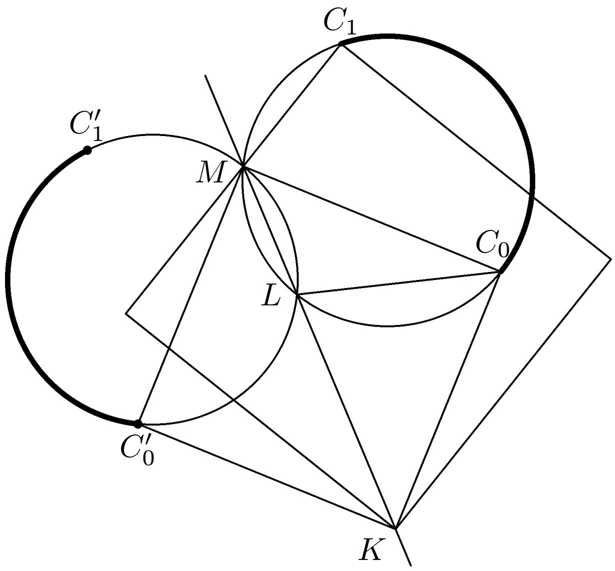
Veľkosť uhla LCD ($|\measuredangle LCD| = |\measuredangle LC_0M|$) je určená polohou bodu L na úsečke MK, má teda konštantnú veľkosť, takže bod C leží na rovnakom oblúku γ kružnice opísanej trojuholníku LC_0M nad tetivou LM ako bod C_0. Naviac kružnica opísaná trojuholníku A_0KL je zhodná s kružnicou opísanou trojuholníku C_0ML, pretože v jednej z nich vidno tetivu A_0L z bodu K pod uhlom 45° a v druhej tetivu C_0L zhodnej dĺžky pod rovnakým uhlom z bodu M.

Pretože bod M leží na strane CD, zrejme $|\measuredangle LMC| \geqq |\measuredangle LDC| = 45°$ (pokiaľ $M \neq D$, je to vonkajší uhol trojuholníka DML, ktorý má pri vrchole D uhol 45°). Pretože uhol LMC_0 meria práve 45°, leží bod C na časti oblúka γ medzi bodmi C_0 a M.

Ďalej si všimnime, že vrchol D štvorca $ABCD$ leží na oblúku, z ktorého vidno úsečku LM pod uhlom 45° v polrovine opačnej ku KMC. Zostrojme bod P (obr. 4), ktorý leží na priesečníku priamky AD a kolmice na priamku MK v bode L. Body M, D, L a P ležia na Tálesovej kružnici s priemerom MP, a pretože $|\measuredangle MPL| = |\measuredangle MDL| = 45°$, je trojuholník MPL rovnoramenný pravouhlý. To znamená, že bod P je jednoznačne určený polohou bodu L na úsečke MK. (Bod P vznikne otočením bodu M okolo stredu L o 90°, pretože bod L ako bod uhlopriečky BD má od priamok CD a DA rovnakú vzdialenosť, priamka DA je teda v spomenutom otočení obrazom priamky CD; odtiaľ taktiež vyplýva rovnosť $|LM| = |LP|$.)

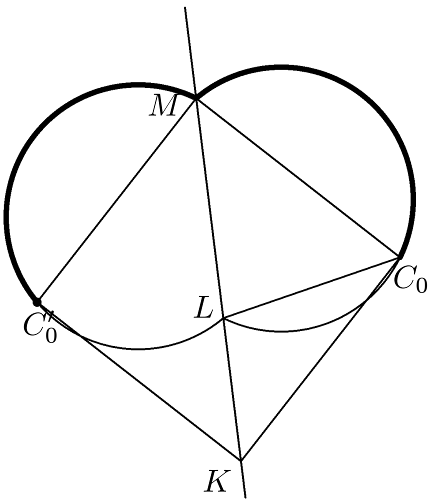
Bod D preto musí ležať na oblúku δ Tálesovej polkružnice nad priemerom MP v polrovine opačnej k PML, súčasne ale polpriamka DP (ktorá obsahuje vrchol A) nesmie pretnúť úsečku LK. Odtiaľ vyplýva, že vrchol D môže ležať len v tej časti spomenutej polkružnice nad priemerom MP, ktorá leží v polrovine PKL. Pritom je zrejmé, že priamka PK túto polkružnicu pretne v ďalšom bode rôznom od P práve vtedy, keď $|KL| > |LM|$ (pre $|KL| = |LM|$ bude KP dotyčnicou kružnice nad priemerom MP). Keď označíme v takom prípade D_1 priesečník KP s polkružnicou δ a C_1 priesečník polpriamky D_1M s oblúkom γ, je zrejmé, že vrchol C padne do časti C_0C_1 oblúka γ. V opačnom prípade, t. j. pre $|KL| \leqq |LM|$, vyplnia zrejme vrcholy C celú časť C_0M oblúka γ.

Naozaj. Zvoľme ľubovoľný bod C na časti C_0C_1 oblúka γ v prvom prípade, resp. na C_0M v druhom prípade. Priamka CM pretne oblúk δ v bode, ktorý označíme D. Vrchol A potom zostrojíme ako priesečník polpriamky DP s Tálesovou kružnicou nad priemerom PK (v prvom prípade máme zaručené, že bude ležať v polrovine PKA_0, a nie v opačnej). Pretože, ako už vieme, sú kružnice opísané trojuholníkom LC_0M a LA_0K zhodné, zistíme ľahko z príslušných obvodových uhlov, že $|\measuredangle DAL| = |\measuredangle DCL|$, takže trojuholníky DAL a DCL sú zhodné, teda $|DA| = |DC|$. Pretože polpriamka DL pretína úsečku MK v bode L, pretne polpriamka AK polpriamku DL v bode B za bodom K, pričom trojuholník DAB je rovnoramenný pravouhlý. $ABCD$ je teda štvorec, ktorý spĺňa podmienky úlohy.



Obr. 5

Záver. Hľadanou množinou vrcholov C štvorcov $ABCD$ je pre $|ML| < |LK|$ oblúk C_0C_1 kružnice opísanej trojuholníku MLC_0 a oblúk s ním osovo súmerný podľa danej priamky MK (obr. 5), pre $|ML| \geqq |LK|$ je to oblúk C_0M rovnakej kružnice a oblúk s ním osovo súmerný podľa priamky MK (obr. 6).



Obr. 6

---

6. *Hráči A a B hrajú na doske zloženej zo šiestich polí očíslovaných $1, 2, \ldots, 6$ nasledujúcu hru. Na začiatku je umiestnená na pole s číslom 2 figúrka a potom sa hádže bežnou hracou kockou. Ak padne číslo deliteľné tromi, posunie sa figúrka na pole s číslom o jedna menším, inak na pole s číslom o jedna väčším. Hra končí víťazstvom hráča A (resp. B), ak sa dostane figúrka na pole s číslom 1 (resp. 6). S akou pravdepodobnosťou zvíťazí hráč A?* (*P. Černek*)

Riešenie. Označme p_i pravdepodobnosť, že vyhrá hráč A, pričom figúrka stojí na i-tom políčku. Dostaneme sústavu rovníc

$$
\begin{aligned}
p_2 &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}p_3,\\
p_3 &= \frac{1}{3}p_2 + \frac{2}{3}p_4,\\
p_4 &= \frac{1}{3}p_3 + \frac{2}{3}p_5,\\
p_5 &= \frac{1}{3}p_4.
\end{aligned}
$$

Postupným dosadzovaním z jednej rovnice do druhej dostaneme riešenie $p_2 = 15/31$. Pretože na začiatku stojí figúrka na políčku číslo 2, je pravdepodobnosť výhry hráča A rovná $15/31$. Podobným spôsobom zostavíme a vyriešime systém rovníc pre hráča B a dostaneme tak, že hráč B vyhrá s pravdepodobnosťou $16/31$. Pravdepodobnosť remízy je teda 0. Tým je úloha vyriešená.