2002/2003
52. ročník MO *Riešenia úloh celoštátneho kola kategórie A*

---

1. *V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc*

$$x^2 - xy + y^2 = 7,$$
$$x^2y + xy^2 = -2.$$

(*J. Földes*)

Riešenie. Pretože druhú rovnicu môžeme upraviť na tvar $xy(x+y) = -2$, upravme podobne aj prvú rovnicu: $(x+y)^2 - 3xy = 7$. Pre čísla $s = x+y$, $p = xy$ tak dostávame ekvivalentnú sústavu

$$\begin{aligned} s^2 - 3p &= 7, \\ sp &= -2, \end{aligned} \tag{1}$$

ktorá po vyjadrení $p = -2/s$ (zrejme nemôže byť $s = 0$) z druhej rovnice vedie na kubickú rovnicu $s^3 - 7s + 6 = 0$. Tá má celočíselné korene $s_1 = 1$, $s_2 = 2$ a $s_3 = -3$. Nájdeným hodnotám s zodpovedajú tieto hodnoty súčinu $p = xy$: $p_1 = -2$, $p_2 = -1$, $p_3 = 2/3$. Čísla x, y tvoria dvojicu koreňov kvadratickej rovnice $t^2 - st + p = 0$, takže sa jedná o jednu z rovníc

$$t^2 - t - 2 = 0, \quad t^2 - 2t - 1 = 0, \quad t^2 + 3t + \frac{2}{3} = 0.$$

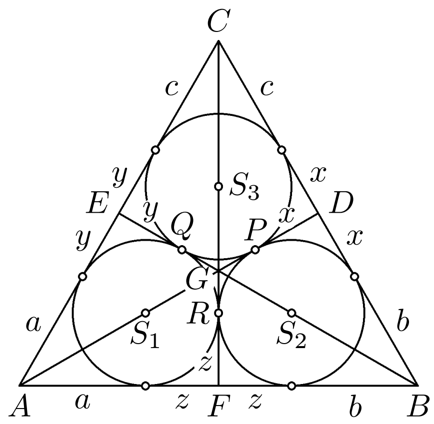
Ich riešením dostaneme (všetkých) šesť riešení danej sústavy

$$\{x,y\} = \{-1, 2\}, \quad \{x,y\} = \{1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\},$$
$$\{x,y\} = \left\{\frac{-9+\sqrt{57}}{6}, \frac{-9-\sqrt{57}}{6}\right\}.$$

---

2. *Vnútri strán BC, CA, AB daného trojuholníka ABC zvolíme postupne body D, E, F tak, aby sa úsečky AD, BE, CF preťali v jednom bode, ktorý označíme G. Ak je možné štvoruholníkom $AFGE$, $BDGF$, $CEGD$ vpísať kružnice, z ktorých každé dve majú vonkajší dotyk, potom je trojuholník ABC rovnostranný. Dokážte.* (*M. Tancer*)

Riešenie. Predpokladajme, že spomenuté štvoruholníky majú uvedenú vlastnosť. Zo súmernosti dotyčníc z daného bodu k danej kružnici vyplýva, že strany trojuholníka ABC sú rozdelené bodmi D, E, F a bodmi dotyku kružníc vpísaných uvažovaným štvoruholníkom na úseky dĺžok, ktoré označíme podľa obr. 1. Sú na ňom tiež vyznačené body P, Q, R vzájomného dotyku spomenutých kružníc. Naším cieľom je dokázať rovnosti $x = y = z$ a $a = b = c$.



Obr. 1

Pre úseky dotyčníc z bodu A ku kružniciam pri strane BC platia rovnosti $a+2z = |AP| = a + 2y$, odkiaľ ihneď vyplýva $y = z$; z dôvodov symetrie teda naozaj platí $x = y = z$. (Všade ďalej budeme písať x namiesto y a z.) Všimnime si teraz trojuholníky AEG a AFG. Majú spoločnú stranu AG a zhodné strany AF a AE (dĺžky $a+x$). Tiež ich tretie strany EG a FG sú zhodné, lebo

$$|EG| = |EQ| + |QG| = x + |RG| = |FR| + |RG| = |FG|.$$

Trojuholníky AEG a AFG sú teda zhodné podľa vety *sss*, takže uhly BAD a CAD sú zhodné a polpriamka AD je osou uhla BAC. Ako vieme, os uhla trojuholníka pretína protiľahlú stranu v pomere dĺžok priľahlých strán. V našom prípade to znamená, že

$$\frac{a+2x+b}{a+2x+c} = \frac{b+x}{c+x}.$$

Jednoduchou úpravou dostaneme rovnosť $(b-c)(a+x) = 0$, z ktorej vidíme, že $b = c$. Z dôvodov symetrie teda platí $a = b = c$ a celý dôkaz je hotový.

Iné riešenie. Označme S_1, S_2, S_3 stredy vpísaných kružníc (obr. 1). Rovnako ako v predchádzajúcom riešení si najprv všimneme, že platí $x = y = z$ a že trojuholníky AEG a AFG sú zhodné. K tomu sme využili rovnosť $|GQ| = |GR|$, z ktorej vyplýva, že podľa vety *sss* sú zhodné aj trojuholníky S_1QG a S_1RG. Keďže $R \in S_1S_2$ a $Q \in S_1S_3$, zo súmernosti podľa osi AD teraz vyplýva, že priamky AB a S_1S_2 zvierajú rovnaký uhol ako priamky AC a S_1S_3, a pretože kolmé priemety úsečiek S_1S_2 a S_1S_3 na zodpovedajúce priamky AB, resp. AC sú zhodné (majú dĺžku $2x$), platí $|S_1S_2| = |S_1S_3|$. Analogicky $|S_1S_2| = |S_2S_3|$, takže trojuholník $S_1S_2S_3$ je rovnostranný. Odtiaľ pre polomery r_1, r_2 a r_3 vpísaných kružníc vyplýva $r_1 + r_2 = r_2 + r_3 = r_3 + r_1$, čiže $r_1 = r_2 = r_3$. Kružnice sú teda zhodné, takže $AB \parallel S_1S_2$, $BC \parallel S_2S_3$ a $CA \parallel S_3S_1$ a trojuholník ABC je rovnostranný.

Poznámka. K dokončeniu predchádzajúceho dôkazu môžeme úvahu o dĺžkach úsečiek S_iS_j nahradiť úvahou o tzv. orientovaných uhloch medzi priamkami. Orientovaný uhol $\langle p, q\rangle$ priamok p, q (v tomto poradí) je uhol, o ktorý musíme v kladnom smere otočiť priamku q, aby bola rovnobežná s priamkou p. Pritom $\langle p,q\rangle = \langle q,p\rangle$ práve vtedy, keď $\langle p,q\rangle$ je násobok $90°$. Zo súmernosti podľa osí AD, BE a CF tak postupne dostávame $\langle S_1S_3, AC\rangle = \langle AB, S_1S_2\rangle = \langle S_2S_3, BC\rangle = \langle AC, S_1S_3\rangle$. Pretože obe zodpovedajúce kružnice so stredmi S_1, S_3 majú spoločnú dotyčnicu AC a ležia v rovnakej polrovine určenej priamkou AC, znamená to, že S_1S_3 a AC sú rovnobežné.

---

3. *Postupnosť* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *s prvým členom* $x_1 = 1$ *spĺňa pre každé* $n > 1$ *podmienku*

$$x_n = \pm(n-1)x_{n-1} \pm (n-2)x_{n-2} \pm \ldots \pm 2x_2 \pm x_1$$

s vhodnou voľbou znamienok „+" a „−". Rozhodnite, či je možné, aby nerovnosť $x_n \neq 12$ *platila len pre konečne veľa indexov* n. (*P. Černek*)

Riešenie. Pokiaľ sa nám podarí zostaviť podľa daného pravidla $(k+3)$-člennú postupnosť

$$x_1 = 1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{k-1},\ x_k = x_{k+1} = x_{k+2} = x_{k+3} = 12,$$

môžeme všetky nasledujúce členy $x_{k+4}, x_{k+5}, x_{k+6}, \ldots$ definovať tak, aby sa tiež rovnali číslu 12. Skutočne, vzhľadom na matematickú indukciu stačí ukázať, ako s vytýčeným cieľom vybrať znamienka v rovnosti určujúcej člen x_{k+4}. Položme

$$\begin{aligned} x_{k+4} = {}& +12(k+3) - 12(k+2) - 12(k+1) + 12k \pm \\ & \pm (k-1)x_{k-1} \pm (k-2)x_{k-2} \pm \ldots \pm x_1, \end{aligned}$$

pritom znamienka v druhom riadku vyberieme presne také, aké boli v súčte určujúcom člen $x_k = 12$. Potom sa súčet v druhom riadku rovná 12, takže vychádza

$$x_{k+4} = 12(k+3) - 12(k+2) - 12(k+1) + 12k + 12 = 12.$$

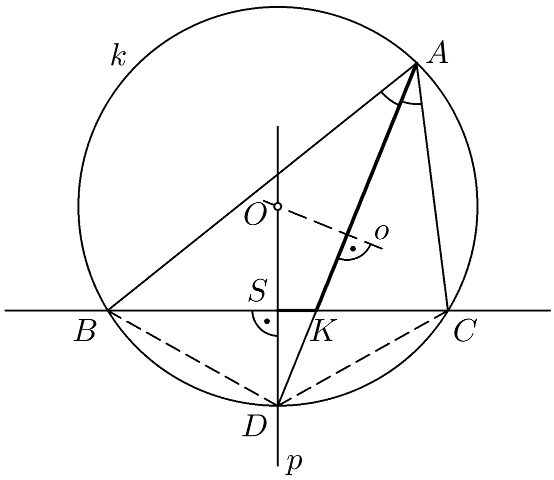
Vhodný príklad pre $k = 8$ je $x_1 = x_2 = x_3 = 1$,

$$\begin{aligned}
x_4 &= 3 - 2 + 1 = 2,\\
x_5 &= 4\cdot 2 - 3 - 2 + 1 = 4,\\
x_6 &= 5\cdot 4 - 4\cdot 2 - 3 - 2 - 1 = 6,\\
x_7 &= 6\cdot 6 - 5\cdot 4 - 4\cdot 2 + 3 - 2 + 1 = 10,\\
x_8 &= 7\cdot 10 - 6\cdot 6 - 5\cdot 4 - 4\cdot 2 + 3 + 2 + 1 = 12,\\
x_9 &= 8\cdot 12 - 7\cdot 10 - 6\cdot 6 + 5\cdot 4 + 4\cdot 2 - 3 - 2 - 1 = 12,\\
x_{10} &= 9\cdot 12 - 8\cdot 12 - 7\cdot 10 + 6\cdot 6 + 5\cdot 4 + 4\cdot 2 + 3 + 2 + 1 = 12,\\
x_{11} &= 10\cdot 12 + 9\cdot 12 - 8\cdot 12 - 7\cdot 10 - 6\cdot 6 - 5\cdot 4 + 4\cdot 2 - 3 + 2 - 1 = 12.
\end{aligned}$$

Dokázali sme, že jedna z uvažovaných postupností má iba prvých sedem členov rôznych od čísla 12.

4. *V rovine je daný tupý uhol AKS. Zostrojte trojuholník ABC tak, aby jeho strana BC ležala na priamke KS, aby bod S bol jej stredom a bod K jej priesečníkom s osou protiľahlého uhla BAC.* (P. Leischner)

Riešenie. *Rozbor*. Predpokladajme, že trojuholník ABC má všetky požadované vlastnosti a označme D priesečník kružnice k opísanej trojuholníku ABC s polpriamkou opačnou k ramenu KA daného uhla AKS (obr. 2). Polpriamka AD rozpoľuje uhol BAC, preto sú uhly BAD a CAD zhodné, takže sú zhodné aj tetivy BD a CD kružnice k. Bod S je preto stredom základne BC rovnoramenného trojuholníka BCD, takže uhol BSD je pravý. To znamená, že bod D leží na priamke p, ktorá prechádza bodom S kolmo na dané rameno KS. Stred O kružnice k leží jednak na priamke p (osi tetivy BC), jednak na priamke o, ktorá je osou tetivy AD.



Obr. 2

Konštrukcia. Pre daný uhol AKS najprv preložíme bodom S priamku p kolmú na rameno KS. Potom zostrojíme priesečník D priamky p s polpriamkou opačnou k ramenu KA. Ďalej zostrojíme os o úsečky AD a jej priesečník s priamkou p označíme O. Konečne zostrojíme kružnicu k so stredom O a polomerom $r = |OA|$ $(= |OD|)$ a jej priesečníky s priamkou KS označíme B a C.

Dôkaz správnosti konštrukcie. Ukážeme, že zostrojený trojuholník ABC má všetky požadované vlastnosti. Z posledného kroku konštrukcie vyplýva, že body B, C ležia na priamke KS a že bod S je stredom úsečky BC. Pretože na priamke p, osi úsečky BC, leží aj bod D, platí $|BD| = |CD|$, a preto $|\measuredangle BAD| = |\measuredangle CAD|$ (lebo všetky body A, B, C, D ležia na kružnici k.) Polpriamka AD je teda osou uhla BAC a bod K je jej priesečníkom s úsečkou BC.

Diskusia. Vysvetlíme, prečo pre daný tupý uhol AKS je hľadaný trojuholník ABC jediný (keď neberieme do úvahy možnosť zameniť označenie vrcholov B a C). Pretože je uhol AKS tupý, bod D z našej konštrukcie zrejme existuje a priamky p a o sú rôznobežné, takže aj bod O je určený jednoznačne. Zostáva zdôvodniť, prečo kružnica k pretne priamku KS v dvoch bodoch. Pretože bod K je vnútorným bodom základne AD rovnoramenného trojuholníka ADO, platí $|OK| < |OA| = |OD| = r$, teda bod K leží vo vnútornej oblasti kružnice k a priamka KS je nutne jej sečnicou.

---

5. *Ukážte, že v číselnej sústave s ľubovoľným základom $z \geqq 3$ existujú dvojmiestne čísla A a B, ktoré sa líšia len poradím svojich číslic a majú túto vlastnosť: Kvadratická rovnica $x^2 - Ax + B = 0$ má v obore reálnych čísel dvojnásobný koreň. Dokážte tiež, že pre daný základ z je taká dvojica A, B jediná. Napríklad v desiatkovej sústave ($z = 10$) sú to jedine čísla $A = 18$ a $B = 81$.* (*J. Šimša*)

Riešenie. Hľadané dvojmiestne čísla A, B majú tvar $A = az + b$ a $B = bz + a$, kde a, b sú ich (nenulové!) číslice, takže $a, b \in \{1, 2, \dots, z-1\}$. Kvadratická rovnica z textu úlohy má dvojnásobný koreň x_0 práve vtedy, keď platí $2x_0 = A$ a $x_0^2 = B$. Z týchto rovností vyplýva, že číslo x_0 je kladné a celé. Vzhľadom na nerovnosť $x_0^2 = B < z^2$ (B je totiž dvojmiestne, zatiaľ čo z^2 je trojmiestne) naviac platí $x_0 < z$, odkiaľ $A = 2x_0 < 2z$, takže číslo A má ako prvú číslicu jednotku. Platí teda $a = 1$ a z rovností $2x_0 = z + b$ a $x_0^2 = bz + 1$ vylúčením x_0 dostaneme pre číslicu b kvadratickú rovnicu $(b-z)^2 = 4$ s dvoma koreňmi $b_1 = z - 2$ a $b_2 = z + 2$. Za číslicu b možno však zobrať iba prvú z nich, takže nutne $b = z - 2$.

Dokázali sme, že čísla A, B musia byť tvaru $A = z + (z-2) = 2z - 2$ a $B = (z-2)z + 1 = (z-1)^2$; v sústave so základom z teda majú zápisy $A = \overline{1(z-2)}$ a $B = \overline{(z-2)1}$. Urobme ešte skúšku. Kvadratická rovnica $x^2 - (2z-2)x + (z-1)^2 = 0$ má naozaj dvojnásobný koreň $x_0 = z - 1$, lebo jej ľavá strana je rovná $(x - z + 1)^2$.

Poznámka. Kľúčovú rovnosť $a = 1$ možno odvodiť aj bez úvahy o dvojnásobnom koreni x_0 skúmanej rovnice, keď zapíšeme podmienku, že jej diskriminant $A^2 - 4B$ je rovný nule:

$$0 = A^2 - 4B = (az+b)^2 - 4(bz+a) = b^2 + 2z(a-2)b + a(az^2 - 4).$$

Posledný výraz môže mať nulovú hodnotu len vtedy, keď je činiteľ $a - 2$ záporný, lebo $b \geqq 1$, $a \geqq 1$, $z \geqq 3$ a $az^2 - 4 \geqq 3^2 - 4 = 5$. Z nerovnosti $a - 2 < 0$ už však vyplýva $a = 1$. Pre také a dostávame rovnicu $0 = b^2 - 2zb + (z^2 - 4)$ a záver je rovnaký ako v uvedenom riešení.

---

6. *Ak súčin kladných čísel a, b, c je rovný 1, potom platí*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqq a + b + c.$$

Dokážte. (*P. Kaňovský*)

Riešenie. K daným kladným číslam a, b, c spĺňajúcim podmienku $abc = 1$ zapíšeme AG-nerovnosť pre trojicu čísel a/b, a/b a b/c.

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c}\right) \geqq \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}} = \sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} = \sqrt[3]{\frac{a^3}{abc}} = a.$$

Platí teda odhad

$$\frac{2a}{3b} + \frac{b}{3c} \geqq a.$$

Z rovnakého dôvodu platia aj odhady

$$\frac{2b}{3c}+\frac{c}{3a}\geqq b \quad \text{a} \quad \frac{2c}{3a}+\frac{a}{3b}\geqq c.$$

Sčítaním týchto troch odhadov dostaneme dokazovanú nerovnosť.

Iné riešenie. Ak platí pre kladné čísla a, b, c rovnosť $abc=1$, potom $\max\{a,b,c\}\geqq$ $\geqq 1$ a $\min\{a,b,c\}\leqq 1$. Pretože dokazovaná nerovnosť sa nezmení, keď nahradíme trojicu (a,b,c) trojicou (b,c,a) alebo trojicou (c,a,b), budeme predpokladať, že čísla a a c sú z trojice (a,b,c) najmenšie a najväčšie (v nejakom poradí), takže platí

$$(a-1)(1-c)\geqq 0. \tag{1}$$

Do dokazovanej nerovnosti dosadíme $c=a^{-1}b^{-1}$ a urobíme niekoľko ekvivalentných úprav.

$$\begin{aligned} ab^{-1}+ab^2+a^{-2}b^{-1} &\geqq a+b+a^{-1}b^{-1}, \qquad / \cdot a^2b\\ a^3+a^3b^3+1 &\geqq a^3b+a^2b^2+a,\\ a^3b^3-a^2b^2-a^3b+a^3-a+1 &\geqq 0,\\ a^3(b^3-b^2-b+1)+(a^3-a^2)b^2-(a-1) &\geqq 0,\\ a^3(b-1)^2(b+1)+(a-1)(ab-1)(ab+1) &\geqq 0. \end{aligned}$$

Posledná nerovnosť platí, lebo $(a-1)(ab-1)=(a-1)(ab-abc)=ab(a-1)(1-c)$ a taký súčin je podľa (1) nezáporný.

Iné riešenie. Pre ľubovoľné kladné čísla A, B, C sú trojice (A^2,B^2,C^2) a (A,B,C) tzv. súhlasne usporiadané, teda platí nerovnosť

$$A^2\cdot A+B^2\cdot B+C^2\cdot C\geqq A^2\cdot B+B^2\cdot C+C^2\cdot A. \tag{2}$$

Dokážme (2) bezprostredne. Úpravou dostávame nerovnosť

$$(A-C)^2(A+C)+(B-C)(B^2-A^2)\geqq 0,$$

ktorá zrejme platí, pokiaľ $B=\max\{A,B,C\}$, čo možno vždy dosiahnuť cyklickou permutáciou danej trojice čísel. Keď zvolíme v dokázanej nerovnosti (2) hodnoty $A=$ $=\sqrt[3]{a/b}$, $B=\sqrt[3]{b/c}$ a $C=\sqrt[3]{c/a}$, dostaneme nerovnosť

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqq\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}}+\sqrt[3]{\frac{b^2}{ca}}+\sqrt[3]{\frac{c^2}{ab}},$$

z ktorej za predpokladu $abc=1$ vyplýva dokazovaná nerovnosť.