2002/2003
52. ročník MO *Riešenia úloh krajského kola kategórie B*

---

1. *Určte najväčší počet po sebe idúcich päťmiestnych prirodzených čísel, medzi ktorými nie je žiadny palindróm (t. j. číslo, ktoré sa číta odpredu rovnako ako odzadu).* (J. Šimša)

Riešenie. Medzi 109 po sebe idúcimi päťmiestnymi číslami

$$10\,902,\ 10\,903, \dots, 10\,999,\ 11\,000, \dots, 11\,009,\ 11\,010$$

nie je žiadny palindróm (je možné uviesť aj iné vyhovujúce príklady 109 päťmiestnych čísel, my sme vypísali skupinu najmenších z nich). Najmenší a najväčší päťmiestny palindróm sú čísla 10 001 a 99 999; pred číslom 10 001 je len jedno päťmiestne číslo, za číslom 99 999 už dokonca žiadne také číslo nie je. Ukážeme teraz, že za každým päťmiestnym palindrómom x, $x \neq 99\,999$, nasleduje päťmiestny palindróm $x + 100$ alebo $x + 110$ alebo $x + 11$. Skutočne, ak $x = \overline{abcba}$, tak v prípade $c \neq 9$ je palindrómom číslo $x + 100 = \overline{ab(c+1)ba}$, v prípade $c = 9 \neq b$ je palindrómom číslo $x + 110 = \overline{a(b+1)0(b+1)a}$ a v prípade $c = b = 9$ (keď nutne $a \neq 9$) je palindrómom číslo $x + 11 = \overline{(a+1)000(a+1)}$.

Odpoveď. Hľadaný najväčší počet čísel je rovný 109.

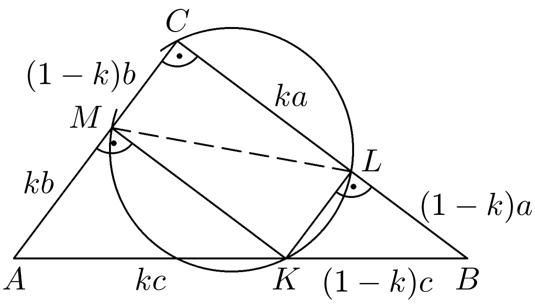
---

2. *V rovine je daný pravouhlý trojuholník ABC. Nech K je ľubovoľný bod prepony AB. Kružnica zostrojená nad úsečkou CK ako nad priemerom pretne odvesny BC a CA vo vnútorných bodoch, ktoré označíme postupne L a M. Rozhodnite, pre ktorý bod K má štvoruholník $ABLM$ najmenší možný obsah.* (J. Švrček)

Riešenie. Pretože uhly KLC, KMC a LCM sú pravé (obr. 1), je štvoruholník $KLCM$ pravouholník a trojuholníky AKM a KBL sú podobné s trojuholníkom ABC. Označme ako obyčajne $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ a položme $|AK| = kc$, kde $0 < k < 1$. Potom však $|KB| = (1-k)c$ a zo spomenutej podobnosti trojuholníkov dostávame vyjadrenie $|AM| = kb$, $|LC| = |KM| = ka$, $|BL| = (1-k)a$ a $|MC| = |KL| = (1-k)b$. Preto platí

$$\begin{aligned} S_{ABLM} &= S_{ABC} - S_{LMC} = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2} \cdot ka \cdot (1-k)b = \\ &= \frac{1}{2}ab(1 - k + k^2) = \frac{1}{2}ab\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) \geqq \\ &\geqq \frac{1}{2}ab \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}S_{ABC}, \end{aligned}$$

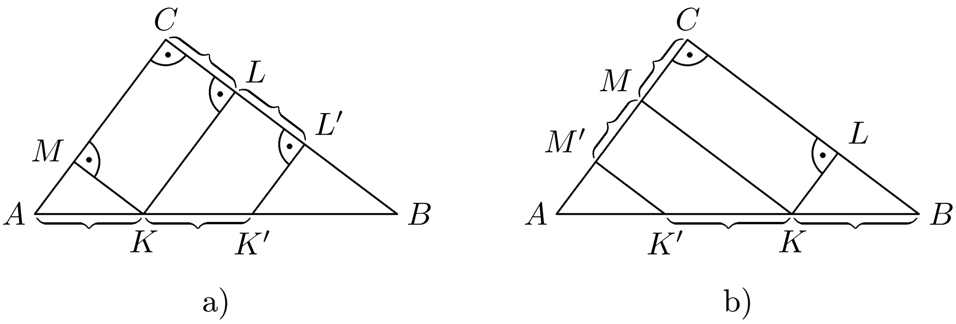
pričom rovnosť $S_{ABLM} = \frac{3}{4}S_{ABC}$ nastane práve vtedy, keď $k = 1/2$, teda práve vtedy, keď je bod K stredom prepony AB.



Obr. 1

Iné riešenie. Štvoruholník $ABLM$ má minimálny obsah práve vtedy, keď má maximálny obsah trojuholník LMC, ktorý je „polovicou“ pravouholníka $KLCM$. Stačí preto ukázať, že obsah S_{KLCM} je maximálny práve vtedy, keď je bod K stredom prepony AB (keď zrejme $S_{KLCM} = S_{ABC}/2$). Ak je bod K vybraný tak, že $|AK| < |AB|/2$, je úsečka KL strednou priečkou lichobežníka $AK'L'C$, ktorý má o $S_{K'L'B}$ menší obsah ako trojuholník ABC (obr. 2a), takže platí

$$S_{KLCM} = \frac{1}{2} S_{AK'L'C} < \frac{1}{2} S_{ABC}.$$



Obr. 2

Ak naopak $|AK| > \frac{1}{2}|AB|$, využijeme obdobný lichobežník $BK'M'C$ (obr. 2b) a usúdime, že platí

$$S_{KLCM} = \frac{1}{2} S_{BK'M'C} < \frac{1}{2} S_{ABC}.$$

Tým je tvrdenie o maximálnom obsahu S_{KLCM} dokázané.

Odpoveď. Štvoruholník $ABLM$ má najmenší možný obsah práve vtedy, keď bod K leží uprostred prepony AB.

3. *Určte všetky reálne čísla p, pre ktoré má rovnica*

$$(x-1)^2 = 3|x| - px$$

práve tri rôzne riešenia v obore reálnych čísel. (J. Šimša)

Riešenie. Aj keď danú úlohu možno riešiť názorne geometrickou úvahou o vzájomnej polohe paraboly $y = (x-1)^2$ a lomenej čiary $y = 3|x| - px$, dáme najprv prednosť čisto algebraickému postupu. Daná rovnica zrejme nemá riešenie $x = 0$. Po odstránení absolútnej hodnoty a jednoduchej úprave dostaneme rovnice

$$x^2 + (p+1)x + 1 = 0 \qquad \text{pre } x < 0, \tag{1}$$

$$x^2 + (p-5)x + 1 = 0 \qquad \text{pre } x > 0. \tag{2}$$

Pretože každá kvadratická rovnica má najviac dva rôzne korene, hľadáme všetky tie čísla p, pre ktoré má jedna z rovníc (1), (2) jeden koreň a druhá dva rôzne korene (a to vždy predpísaných znamienok). Všimnime si, že pre každé $q \in \mathbb{R}$ majú reálne korene $x_{1,2}$ rovnice $x^2 + qx + 1 = 0$ (ak vôbec existujú) rovnaké znamienko, ktoré je opačné ako znamienko čísla q; platí totiž $x_1x_2 = 1$ a $x_1 + x_2 = -q$. Pre rovnice (1), (2) tak hlavne dostávame podmienky

$$p + 1 > 0 \quad \text{a} \quad p - 5 < 0, \quad \text{čiže} \quad p \in (-1, 5).$$

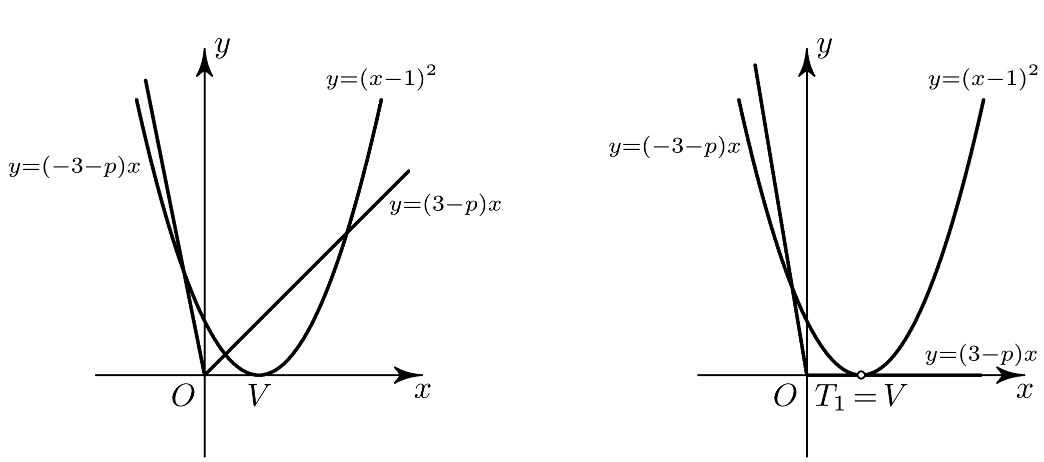
Okrem toho už len požadujeme, aby pre diskriminanty oboch rovníc

$$D_1 = (p+1)^2 - 4, \quad D_2 = (p-5)^2 - 4$$

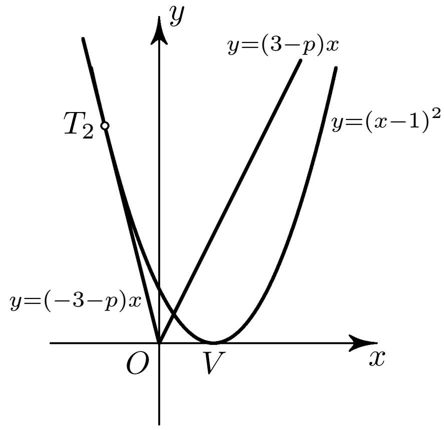
platilo buď $D_1 = 0$ a $D_2 > 0$, alebo $D_1 > 0$ a $D_2 = 0$. Rovnosť $D_1 = 0$ platí iba pre $p \in \{-3, 1\}$, rovnosť $D_2 = 0$ iba pre $p \in \{3, 7\}$. Z týchto štyroch hodnôt ležia v intervale $(-1, 5)$ iba čísla $p = 1$ a $p = 3$, pričom pre $p = 1$ vychádza $D_2 = 12 > 0$, pre $p = 3$ zasa $D_1 = 12 > 0$.

Odpoveď. Hľadané hodnoty sú $p = 1$ a $p = 3$.

Iné riešenie. Grafom funkcie $y = (x-1)^2$ je parabola s vrcholom $V[1, 0]$, grafom funkcie $y = 3|x| - px$ je lomená čiara tvorená ramenami niektorého uhla s vrcholom $O[0, 0]$ (obr. 3a pre $p = 2$). Oba grafy majú spoločné tri body práve vtedy, keď



a) $p = 2$ b) $p = 3$



c) $p = 1$

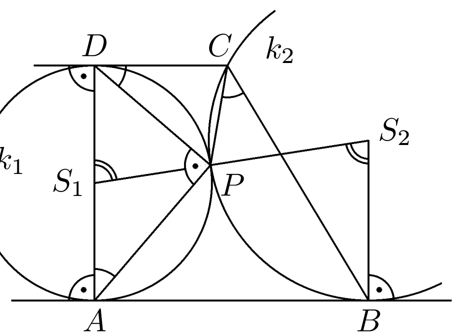
Obr. 3

jedno z ramien spomenutého uhla je dotyčnicou paraboly a druhé je jej „sečnicou“. Pretože skúmaná parabola nemá dotyčnicu rovnobežnú s osou y, môžeme rovnice oboch dotyčníc prechádzajúcich bodom $[0,0]$ hľadať v tvare $y = kx$. Ako je známe, smernica k sa určí z podmienky, že rovnica $kx = (x-1)^2$ má dvojnásobný koreň, teda nulový diskriminant. Ten má vyjadrenie $(k+2)^2 - 4$, takže hľadané hodnoty sú $k_1 = 0$, $k_2 = -4$ a zodpovedajúce body dotyku $T_1 = V[1,0]$ a $T_2[-1,4]$. Z rovníc pre smernice dotykových ramien skúmaných uhlov $3 - p = 0$ a $-3 - p = -4$ nájdeme riešenie $p_1 = 3$ a $p_2 = 1$ a ľahko sa presvedčíme, že druhé rameno je v oboch prípadoch skutočne sečnicou paraboly (obr. 3b pre $p = 3$ a obr. 3c pre $p = 1$).

---

4. *V rovine je daný pravouhlý lichobežník $ABCD$ s dlhšou základňou AB a pravým uhlom pri vrchole A. Označme k_1 kružnicu zostrojenú nad stranou AD ako nad priemerom a k_2 kružnicu, ktorá prechádza bodmi B, C a dotýka sa priamky AB. Ak majú kružnice k_1, k_2 vonkajší dotyk v bode P, je priamka BC dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku CDP. Dokážte.* (J. Švrček)

Riešenie. Označme S_1 a S_2 stredy uvažovaných kružníc (obr. 4). Obe úsečky S_1A a S_2B sú kolmé na priamku AB, sú teda rovnobežné a striedavé uhly PS_2B a PS_1D



Obr. 4

zhodné. Podľa vety o obvodových a striedavých uhloch preto platí

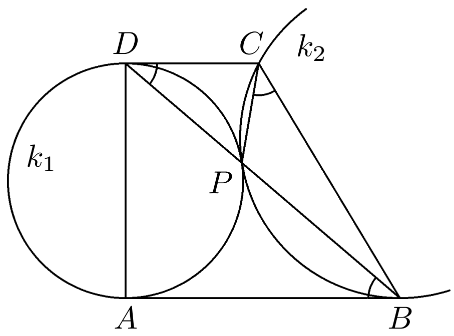
$$|\measuredangle PCB| = \frac{1}{2}|\measuredangle PS_2B| = \frac{1}{2}|\measuredangle PS_1D| = |\measuredangle PAD|.$$

Oba uhly APD a ADC sú však pravé, takže

$$|\measuredangle PAD| = 90^\circ - |\measuredangle ADP| = |\measuredangle CDP|.$$

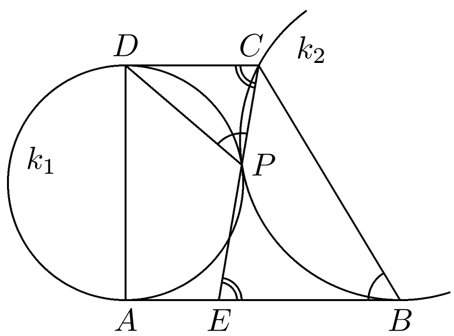
Spolu dostávame, že uhly PCB a CDP sú zhodné, čo podľa vety o obvodovom a úsekovom uhle znamená, že priamka BC je dotyčnicou ku kružnici opísanej trojuholníku CDP.

Iné riešenie. V rovnoľahlosti so stredom P, v ktorej kružnica k_1 prejde na kružnicu k_2, musí dotyčnica CD kružnice k_1 prejsť na rovnobežnú dotyčnicu AB kružnice k_2, pritom sa bod dotyku D zobrazí do bodu dotyku B. Bod P preto leží na uhlopriečke BD (obr. 5). Odtiaľ vyplýva zhodnosť striedavých uhlov CDP a PBA (medzi rovnobežkami AB a CD). Uhol PBA je ale úsekový uhol medzi tetivou BP a dotyčnicou AB kružnice k_2, je teda zhodný s príslušným obvodovým uhlom PCB. Uhly CDP a PCB sú preto zhodné, čo sme potrebovali dokázať (ako v závere predchádzajúceho riešenia).



Obr. 5

Poznámka. Podľa úlohy B–I–5 sú zhodné uhly ABC a CPD (obr. 6). Pretože



Obr. 6

sú zhodné aj striedavé uhly PEB a PCD, kde E je priesečník polpriamky CP so stranou AB, možno požadovanú zhodnosť uhlov CDP a PCB odvodiť z trojuholníkov BCE a PDC.