2002/2003
52. ročník MO *Riešenia úloh domáceho kola kategórie C*

---

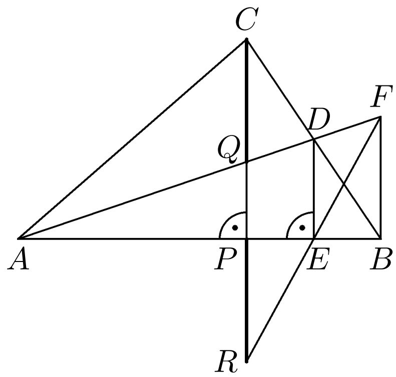
1. *Z piatich jednotiek, piatich dvojok, piatich trojok, piatich štvoriek a piatich pätiek zostavte päť navzájom rôznych päťmiestnych čísel tak, aby ich súčet bol čo najväčší.* (J. Šimša)

Riešenie. Najväčší možný súčet by vytvorila pätica čísel 54 321, 54 321, 54 321, 54 321, 54 321. Keďže majú byť čísla navzájom rôzne, pokúsime sa zmeniť túto päticu tak, aby sa nenarušilo trojčíslie 543, t. j. aby zmena súčtu bola čo najmenšia. Tak ale budú ešte dve z piatich čísel rovnaké, pretože z číslic 1, 2 je možné zostaviť iba štyri rôzne dvojčíslia 11, 12, 21, 22. Zmeníme preto jedno trojčíslie 543 na 542 tak, že zameníme číslicu 2 číslicou 3 na mieste desiatok. Rovnako tak na mieste jednotiek nemôže byť všetkých päť jednotiek, pretože by posledné trojčíslie najmenej troch päťmiestnych čísel bolo 321. Vymeníme preto číslicu 1 z miesta jednotiek s číslicou 2 z miesta stoviek a to preto, aby zmena súčtu pätice čísel bola čo najmenšia. Po týchto výmenách môžu byť posledné dvojčíslia piatich čísel tieto: 31, 22, 21, 21, 11, alebo 31, 21, 21, 21, 12, alebo 32, 21, 21, 21, 11. Snažíme sa teraz rozmiestniť tieto dvojčíslia za trojčíslia 543, 543, 543, 543, 542. Zistíme, že vyhovuje iba prvá pätica dvojčíslí. Hľadaná pätica päťmiestnych čísel s najväčším možným súčtom je 54 331, 54 322, 54 321, 54 311, 54 221.

---

2. *Je daný trojuholník ABC s ostrými vnútornými uhlami pri vrcholoch A a B. Označme Q priesečník ťažnice AD s výškou CP a E pätu kolmice z bodu D na stranu AB. Ďalej nech R je taký bod na polpriamke opačnej k PC, že $|PR| = |CQ|$. Dokážte, že priamky AD a RE sú rôznobežné a že ich priesečník leží na kolmici k priamke AB prechádzajúcej bodom B.* (J. Švrček)

Riešenie. Zo zadania vieme, že $|PR| = |CQ|$, preto aj $|QR| = |CP|$ (obr. 1). Úsečka DE je strednou priečkou trojuholníka CPB, preto $|DE| = |CP|/2$, a teda tiež $|DE| =$



Obr. 1

$= |QR|/2$. Pretože $DE \parallel QR$, nemôžu byť úsečky RE a QD rovnobežné (inak by bol $REDQ$ rovnobežník a platilo by $|DE| = |QR|$). Preto sa priamky RE a QD pretínajú v bode, ktorý je na obrázku označený ako F, a úsečka DE je strednou priečkou trojuholníkov CPB a QRF, ktorých strany CP a QR ležia na jednej priamke.

Preto je vzdialenosť bodov F a B od priamky CR rovnaká, čiže priamky CR a FB sú rovnobežné, a teda priamka FB je (rovnako ako priamka CR) kolmá na priamku AB.

---

3. *Predpokladajme, že každá z dvoch bánk A a B bude mať počas nasledujúcich dvoch rokov stálu ročnú úrokovú mieru. Keby sme uložili $5/6$ našich úspor v banke A a zvyšok v banke B, vzrástli by naše úspory po jednom roku na 67 000 Sk a po dvoch rokoch na 74 900 Sk. Keby sme však uložili $5/6$ našich úspor v banke B a zvyšok v banke A, vzrástli by naše úspory po jednom roku na 71 000 Sk. Na akú čiastku by sa v takom prípade zvýšili naše úspory po dvoch rokoch?* (J. Šimša)

Riešenie. Nech naše pôvodné úspory sú x Sk a nech ročná úroková miera v banke A (resp. v banke B) je $p\,\%$ (resp. $q\,\%$), t. j. vklad v banke A (resp. v banke B) narastie po jednom roku a-krát (resp. b-krát), kde $a = 1 + p/100$ a $b = 1 + q/100$. Podľa zadania platí

$$\begin{aligned}\left(\frac{5}{6}\cdot x\right)\cdot a + \left(\frac{1}{6}\cdot x\right)\cdot b &= 67\,000,\\ \left[\left(\frac{5}{6}\cdot x\right)\cdot a\right]\cdot a + \left[\left(\frac{1}{6}\cdot x\right)\cdot b\right]\cdot b &= 74\,900,\\ \left(\frac{1}{6}\cdot x\right)\cdot a + \left(\frac{5}{6}\cdot x\right)\cdot b &= 71\,000,\end{aligned}$$

a po úprave

$$\begin{aligned}5\cdot\frac{xa}{6} + \frac{xb}{6} &= 67\,000,\\ 5\cdot\frac{xa}{6}\cdot a + \frac{xb}{6}\cdot b &= 74\,900,\\ \frac{xa}{6} + 5\cdot\frac{xb}{6} &= 71\,000.\end{aligned}$$

Keď označíme $u = xa/6$ a $v = xb/6$, prejdú prvá a tretia rovnica na sústavu

$$\begin{aligned}5u + v &= 67\,000,\\ u + 5v &= 71\,000,\end{aligned}$$

z ktorej vychádza $u = 11\,000$ a $v = 12\,000$. Pretože $a = 6u/x$ a $b = 6v/x$, dá sa druhá rovnica sústavy zapísať ako

$$\frac{5}{6}\cdot x\cdot\frac{36u^2}{x^2} + \frac{1}{6}\cdot x\cdot\frac{36v^2}{x^2} = 74\,900,$$

alebo aj

$$\frac{30u^2 + 6v^2}{x} = 74\,900,$$

odkiaľ pre $u = 11\,000$ a $v = 12\,000$ vychádza $x = 60\,000$, preto

$$\begin{aligned}a &= \frac{6u}{x} = \frac{66\,000}{60\,000} = 1{,}1,\\ b &= \frac{6v}{x} = \frac{72\,000}{60\,000} = 1{,}2.\end{aligned}$$

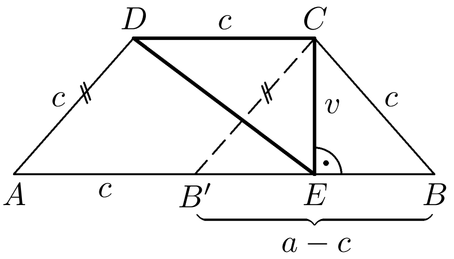
Hľadaná čiastka je preto rovná

$$\left(\frac{1}{6}\cdot x\cdot a^2+\frac{5}{6}\cdot x\cdot b^2\right)\ \text{Sk}=(10\,000\cdot 1{,}1^2+50\,000\cdot 1{,}2^2)\ \text{Sk}=$$
$$=84\,100\ \text{Sk}.$$

---

4. *Zostrojte lichobežník $ABCD$ s výškou $3\,\text{cm}$ a zhodnými stranami BC, CD a DA, pre ktorý platí: Na základni AB existuje bod E taký, že úsečka DE má dĺžku $5\,\text{cm}$ a delí lichobežník na dve časti s rovnakými obsahmi.* (E. Kováč)

Riešenie. *Rozbor*. Ak označíme $|AB| = a$, $|CD| = c$ a výšku lichobežníka v (obr. 2),



Obr. 2

môžeme pre jeho obsah S písať

$$S=\frac{1}{2}(a+c)v.$$

Obsah trojuholníka AED je podľa zadania rovný

$$\frac{|AE|\cdot v}{2}=\frac{1}{2}\cdot S=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(a+c)v,$$

odkiaľ vyplýva, že $|AE| = (a + c)/2$ (t. j. úsečka AE má dĺžku rovnakú ako stredná priečka lichobežníka $ABCD$). Pretože bod E leží na úsečke AB, platí

$$|EB|=|AB|-|AE|=a-\frac{1}{2}(a+c)=\frac{1}{2}(a-c),$$

takže $a > c$. Ak označíme B' bod úsečky AB, pre ktorý $|AB'| = c$, bude $|B'B| = a - c$, a pretože hľadaný lichobežník $ABCD$ je rovnoramenný, je rovnoramenný aj trojuholník $B'BC$, takže stred E úsečky $B'B$ je zároveň pätou výšky z vrcholu C na základňu AB (obr. 2). Pomocou Pytagorovej vety vypočítame, že

$$c=\sqrt{|DE|^2-v^2}=\sqrt{5^2-3^2}\ \text{cm}=4\,\text{cm}.$$

Popis konštrukcie:

1. $\triangle DEC$; $|DC| = 4\,\text{cm}$, $|CE| = 3\,\text{cm}$, $|\measuredangle ECD| = 90°$;
2. p; $p \parallel CD$, $E \in p$;
3. $k(D, 4\,\text{cm})$, $l(C, 4\,\text{cm})$;
4. A; $A \in p \cap k$, uhol ADC je tupý;
5. B; $B \in p \cap l$, uhol BCD je tupý.

Úloha má jediné riešenie.

5. *K prirodzenému číslu m zapísanému rovnakými číslicami sme pripočítali štvormiestne prirodzené číslo n. Získali sme štvormiestne číslo s opačným poradím číslic ako má číslo n. Určte všetky také dvojice čísel m a n.* (J. Zhouf)

Riešenie. Nech číslo $n = \overline{abcd} = 1\,000a + 100b + 10c + d$, kde $a, b, c, d \in \{0, 1, \dots, 9\}$, $a \neq 0$. Číslo $m + n$ je štvormiestne, preto je číslo m najviac štvormiestne. Rozoberieme jednotlivé prípady podľa počtu číslic m.

1. Číslo m je jednomiestne, t. j. $m = \overline{x} = x$, kde $x \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Podľa zadania úlohy jednak

$$m + n = 1\,000a + 100b + 10c + d + x,$$

jednak

$$m + n = 1\,000d + 100c + 10b + a.$$

Odtiaľ postupne dostaneme

$$\begin{gathered} 1\,000a + 100b + 10c + d + x = 1\,000d + 100c + 10b + a, \\ x = 999(d - a) + 90(c - b). \end{gathered}$$

Pravá strana poslednej rovnosti je deliteľná deviatimi, preto môže byť jedine $x = 9$. Po dosadení tejto hodnoty do rovnosti a vykrátení deviatimi vychádza

$$\begin{gathered} 1 = 111(d - a) + 10(c - b), \\ 10(b - c) + 1 = 111(d - a). \end{gathered}$$

Z nerovností $-9 \leqq b - c \leqq 9$ vyplýva $-89 \leqq 10(b - c) + 1 \leqq 91$. Medzi číslami -89 a 91 je jediný násobok 111, a to číslo 0. Rovnosť $10(b - c) + 1 = 0$ však nie je splnená. Žiadne jednomiestne číslo m teda nie je riešením danej úlohy.

2. Číslo m je dvojmiestne, t. j. $m = \overline{xx} = 10x + x = 11x$, kde $x \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Analogicky ako v predchádzajúcom prípade môžeme postupne písať

$$\begin{gathered} 1\,000a + 100b + 10c + d + 11x = 1\,000d + 100c + 10b + a, \\ 11x = 999(d - a) + 90(c - b). \end{gathered}$$

Pravá strana poslednej rovnosti je deliteľná deviatimi, preto môže byť jedine $x = 9$. Potom

$$\begin{gathered} 11 = 111(d - a) + 10(c - b), \\ 10(b - c) + 11 = 111(d - a). \end{gathered}$$

Tu máme $-79 \leqq 10(b - c) + 11 \leqq 101$, odkiaľ vyplýva jediná možnosť $10(b - c) + 11 = 0$, ktorá však neplatí pre žiadne číslice b, c. Žiadne dvojmiestne číslo m teda nie je riešením danej úlohy.

3. Číslo m je trojmiestne, t. j. $m = \overline{xxx} = 100x + 10x + x = 111x$, kde $x \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Opäť môžeme písať

$$\begin{gathered} 1\,000a + 100b + 10c + d + 111x = 1\,000d + 100c + 10b + a, \\ 111x = 999(d - a) + 90(c - b), \\ 37x = 333(d - a) + 30(c - b). \end{gathered}$$

Pravá strana poslednej rovnosti je deliteľná tromi a číslo 37 nie je deliteľné tromi, preto musí byť $x = 3$, alebo $x = 6$, alebo $x = 9$.

Nech $x = 3$. Potom

$$37 = 111(d - a) + 10(c - b),$$
$$10(b - c) + 37 = 111(d - a).$$

Tu máme $-53 \leqq 10(b - c) + 37 \leqq 127$, odkiaľ buď $10(b - c) + 37 = 0$, alebo $10(b - c) + 37 = 111$. Ani jedna z posledných dvoch rovností však nie je splnená pre žiadne číslice b, c.

Nech $x = 6$. Potom

$$74 = 111(d - a) + 10(c - b),$$
$$10(b - c) + 74 = 111(d - a).$$

Tu máme $-16 \leqq 10(b - c) + 74 \leqq 164$, odkiaľ buď $10(b - c) + 74 = 0$, alebo $10(b - c) + 74 = 111$. Ani jedna z posledných dvoch rovností však nie je splnená pre žiadne číslice b, c.

Nech $x = 9$. Potom

$$111 = 111(d - a) + 10(c - b),$$
$$10(b - c) = 111(d - a - 1).$$

Tu máme $-90 \leqq 10(b - c) \leqq 90$, odkiaľ jedine $10(b - c) = 0$ a $111(d - a - 1) = 0$, t. j. jedine $c - b = 0$ a $d - a = 1$. Riešením danej úlohy sú teda čísla $n \in \left\{\overline{1\,bb2}, \overline{2\,bb3}, \overline{3\,bb4}, \overline{4\,bb5}, \overline{5\,bb6}, \overline{6\,bb7}, \overline{7\,bb8}, \overline{8\,bb9}\right\}$ pre $b \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, t. j. celkom 80 čísel. Číslo m je rovné 999.

4. Číslo m je štvormiestne, t. j. $m = \overline{xxxx} = 1\,111x$, kde $x \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Opäť môžeme písať

$$1\,111x = 999(d - a) + 90(c - b).$$

Opäť môže byť jedine $x = 9$, čo dáva rovnosť

$$10(b - c) + 1\,111 = 111(d - a).$$

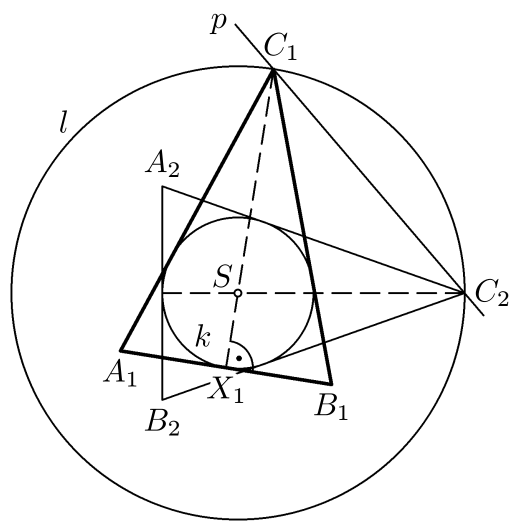
Platí jednak $10(b - c) + 1\,111 \geqq 1\,111 - 90 = 1\,021$, jednak $111(d - a) \leqq 999$. Preto žiadne štvormiestne číslo m nie je riešením danej úlohy.

Záver. Úloha má 80 riešení, a to čísla $m = 999$ a

$$n \in \left\{\overline{1\,bb2}, \overline{2\,bb3}, \overline{3\,bb4}, \overline{4\,bb5}, \overline{5\,bb6}, \overline{6\,bb7}, \overline{7\,bb8}, \overline{8\,bb9}\right\}$$
$$\text{pre } b \in \{0, 1, \ldots, 9\}.$$

6. *V rovine je daná priamka p a kružnica k. Zostrojte taký trojuholník ABC, aby k bola kružnicou jemu vpísanou, aby jej stred ležal v jednej štvrtine jeho ťažnice na stranu AB a aby vrchol C ležal na priamke p. Urobte diskusiu o počte riešení v závislosti na vzájomnej polohe priamky p a kružnice k.* (*P. Černek*)

Riešenie. *Rozbor*. Predpokladajme, že požadovaný trojuholník ABC je zostrojený. Stred kružnice vpísanej ľubovoľnému trojuholníku leží na osiach jeho vnútorných uhlov. Podľa zadania leží stred kružnice k na ťažnici t_c trojuholníka ABC, preto os vnútorného uhla pri vrchole C splýva s ťažnicou t_c. Trojuholník ABC je teda rovnoramenný so základňou AB (obr. 3). Keď leží stred S kružnice k s polomerom r vo štvrtine ťažnice t_c, leží teda vo vzdialenosti r od strany AB a vo vzdialenosti $3r$ od vrcholu C. (Bod S nemôže mať od vrcholu C vzdialenosť $r/3$, lebo by bod C ležal vo vnútornej oblasti kružnice k, ktorá je však trojuholníku ABC vpísaná, takže body A, B, C ležia v jej vonkajšej oblasti.) Bod C je teda priesečníkom priamky p a kružnice l so stredom S a polomerom $3r$.



Obr. 3

Popis konštrukcie:

1. dané: $k(S, r)$, p;
2. $l(S, 3r)$;
3. C; $C \in p \cap l$;
4. X; $X \in \rightarrow CS$, $|XC| = 4r$;
5. x; $x \perp XC$, $X \in x$;
6. dotyčnice a, b z bodu C ku k (napr. pomocou Tálesovej kružnice nad priemerom CS);
7. A, B; $A \in x \cap b$, $B \in x \cap a$.

Diskusia pre prípad, že poradie vrcholov A, B, C je proti smeru pohybu hodinových ručičiek:

Úloha má dve riešenia $\iff |Sp| < 3r$;
úloha má jedno riešenie $\iff |Sp| = 3r$;
úloha nemá žiadne riešenie $\iff |Sp| > 3r$.