2008/2009
58. ročník MO *Zadania úloh celoštátneho kola kategórie A*

(*Súťaž sa konala 22. – 25. 3. 2009.*)

1. Dokážte, že ak sú všetky čísla p, $3p+2$, $5p+4$, $7p+6$, $9p+8$ a $11p+10$ prvočísla, tak číslo $6p+11$ je zložené. (*Pavel Novotný*)

2. Na kratšom z oblúkov CD kružnice opísanej pravouholníku $ABCD$ zvoľme bod P. Päty kolmíc z bodu P na priamky AB, AC a BD označme postupne K, L a M. Ukážte, že uhol LKM má veľkosť 45° práve vtedy, keď $ABCD$ je štvorec. (*Tomáš Jurík*)

3. Nájdite najmenšie kladné číslo x, pre ktoré platí: Ak a, b, c, d sú ľubovoľné kladné čísla, ktorých súčin je 1, potom

$$a^x + b^x + c^x + d^x \geqq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

(*Pavel Novotný*)

4. Skúmajme, pre ktoré prirodzené čísla n existujú práve štyri prirodzené čísla k také, že číslo $n+k$ je deliteľom čísla $n+k^2$.

a) Ukážte, že vyhovuje $n = 58$ a nájdite príslušné štyri k.
b) Dokážte, že párne $n = 2p$, kde $p \geqq 3$, vyhovuje práve vtedy, keď p aj $2p+1$ sú prvočísla.

(Nulu medzi prirodzené čísla nepočítame.) (*Jaromír Šimša*)

5. V každom z vrcholov pravidelného n-uholníka $A_1A_2\dots A_n$ leží určitý počet mincí: vo vrchole A_k je to práve k mincí, $1 \leqq k \leqq n$. Vyberieme dve mince a preložíme každú z nich do susedného vrcholu tak, že jedna sa posunie v smere a druhá proti smeru chodu hodinových ručičiek. Rozhodnite, pre ktoré n možno po konečnom počte takých preložení dosiahnuť, že pre ľubovoľné k, $1 \leqq k \leqq n$, bude vo vrchole A_k ležať $n+1-k$ mincí. (*Radek Horenský*)

6. V rovine ω sú dané dva rôzne body O a T. Nájdite množinu vrcholov všetkých trojuholníkov, ktoré ležia v rovine ω a majú ťažisko v bode T a stred opísanej kružnice v bode O. (*Jaromír Šimša*)