2001/2002
51. ročník MO *Riešenia úloh domáceho kola kategórie A*

---

1. *Ak je S obsah trojuholníka so stranami a, b, c a T je obsah trojuholníka so stranami $a+b$, $b+c$, $c+a$, potom platí $T \geqq 4S$. Dokážte a zistite, kedy nastane rovnosť.*

(*P. Kaňovský*)

Riešenie. Vyjadrenie obsahu S všeobecného trojuholníka z dĺžok jeho strán a, b, c je dané Herónovým vzorcom

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \text{kde} \quad s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Bez označenia s pre polovičný obvod je zápis Herónovho vzorca o niečo dlhší, presnejšie

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}. \tag{1}$$

Urobme malú odbočku a všimnime si, ako Herónov vzorec nepriamo „testuje" známe nerovnosti, ktoré zaručujú existenciu trojuholníka. Čísla a, b, c sú dĺžkami strán niektorého trojuholníka práve vtedy, keď všetky činitele pod odmocninou vo vzťahu (1) sú kladné. Podľa vzťahu (1) je obsah T trojuholníka so stranami $a+b$, $b+c$, $c+a$ rovný

$$T = \frac{1}{4}\sqrt{(2a+2b+2c)(2c)(2a)(2c)} = \sqrt{abc(a+b+c)}.$$

Dokazovanú nerovnosť $T \geqq 4S$ teda rozpíšeme ako

$$\sqrt{abc(a+b+c)} \geqq \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}.$$

V ekvivalentnej nerovnosti medzi odmocňovanými výrazmi skrátime činiteľ $(a+b+c)$ a dostaneme tak nerovnosť

$$abc \geqq (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c), \tag{2}$$

ktorú teraz (pre strany a, b, c všeobecného trojuholníka) niekoľkými spôsobmi dokážeme.

Pri prvom z nich využijeme zrejmé nerovnosti

$$\begin{aligned} a^2 &\geqq a^2-(b-c)^2 = (a-b+c)(a+b-c),\\ b^2 &\geqq b^2-(c-a)^2 = (b-c+a)(b+c-a),\\ c^2 &\geqq c^2-(a-b)^2 = (c-a+b)(c+a-b). \end{aligned} \tag{3}$$

Pretože ide o tri nerovnosti medzi kladnými výrazmi, súčin ich ľavých strán nie je menší ako súčin ich pravých strán, t. j.

$$a^2b^2c^2 \geqq (b+c-a)^2(a+c-b)^2(a+b-c)^2,$$

odkiaľ po odmocnení dostaneme nerovnosť (2). Tým je nerovnosť $T \geqq 4S$ dokázaná. Z nášho postupu tiež vyplýva, že rovnosť $T = 4S$ nastane práve vtedy, keď budú splnené súčasne tri rovnosti

$$a^2 = a^2 - (b-c)^2,\ b^2 = b^2 - (c-a)^2,\ c^2 = c^2 - (a-b)^2,$$

t. j. práve vtedy, keď bude platiť $a = b = c$ (prípad rovnostranného trojuholníka).

Poznamenajme, že dôkaz nerovnosti (2) sme dosiahli vynásobením troch analogických nerovností (3). Prvá z nich po odmocnení oboch strán nadobudne tvar nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom (kladných) čísel $u = a + b - c$ a $v = a - b + c$, t. j.

$$a = \frac{(a+b-c)+(a-b+c)}{2} \geqq \sqrt{(a+b-c)(a-b+c)},$$

Využiť takú AG-nerovnosť nás napadne, keď dokazovanú nerovnosť (2) prepíšeme z pôvodných premenných a, b, c do nových premenných

$$u = a+b-c > 0,\ v = a-b+c > 0,\ w = -a+b+c > 0.$$

Pretože $a = (u+v)/2$, $b = (u+w)/2$ a $z = (v+w)/2$, prejde nerovnosť (2) na nerovnosť

$$(u+v)(u+w)(v+w) \geqq 8uvw \tag{2'}$$

a súvislosť s AG-nerovnosťami

$$\frac{u+v}{2} \geqq \sqrt{uv},\ \frac{u+w}{2} \geqq \sqrt{uw},\ \frac{v+w}{2} \geqq \sqrt{vw}$$

už vidno. Dokázať transformovanú nerovnosť (2′) môžeme však aj použitím jedinej AG-nerovnosti. Po roznásobení ľavej strany (2′) a zrejmej úprave dostaneme

$$\frac{u^2v + u^2w + v^2u + v^2w + w^2u + w^2v}{6} \geqq uvw,$$

čo je AG-nerovnosť pre skupinu šiestich členov

$$u^2v,\ u^2w,\ v^2u,\ v^2w,\ w^2u,\ w^2v,$$

pretože ich geometrický priemer je rovný

$$\sqrt[6]{u^2v \cdot u^2w \cdot v^2u \cdot v^2w \cdot w^2u \cdot w^2v} = uvw.$$

Na záver uveďme ešte jeden algebraický dôkaz nerovnosti (2). Vzhľadom na symetriu predpokladajme, že $a \leqq \min\{b, c\}$, položme $x = b - a \geqq 0$, $y = c - a \geqq 0$ a prepíšme nerovnosť (2) ako nerovnosť pre mnohočlen premennej a s koeficientmi závislými na x a y. Dostávame

$$\begin{aligned}
&abc - (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) = \\
&\quad = a(a+x)(a+y) - (a+x+y)(a+y-x)(a+x-y) = \\
&\quad = a[a^2 + a(x+y) + xy] - [a + (x+y)][a^2 - (x-y)^2] = \\
&\quad = [a^3 + a^2(x+y) + axy] - \\
&\qquad - [a^3 + a^2(x+y) - a(x-y)^2 - (x+y)(x-y)^2] = \\
&\quad = a[xy + (x-y)^2] + (x+y)(x-y)^2.
\end{aligned}$$

Posledný výraz je (vzhľadom na to, že $a > 0$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$) zrejme nezáporný, pričom nule sa rovná práve vtedy, keď platí $xy = 0$ a $x - y = 0$, čiže $x = y = 0$.

2. *V obore celých čísel x, y riešte rovnicu*

$$(x_5)^2 + (y^4)_5 = 2xy^2 + 51,$$

kde n_5 označuje násobok piatich najbližší k číslu n, napríklad $(-9)_5 = -10$.

(*P. Černek*)

Riešenie. Nech dvojica celých čísel x, y vyhovuje danej rovnici. Pretože súčet $(x_5)^2 + (y^4)_5$ je deliteľný piatimi, dáva číslo $2xy^2$ pri delení piatimi zvyšok 4, t. j. $5 \mid (2xy^2-4)$. Číslo y preto nie je deliteľné piatimi, takže platí buď $y = 5k \pm 1$, alebo $y = 5k \pm 2$, kde $5k = y_5$. Obe možnosti teraz preberieme oddelene.

Prípad $y = 5k \pm 1$. Pretože $y^2 = 25k^2 \pm 10k + 1$, platí $5 \mid (y^2 - 1)$, a preto z podmienky $5 \mid (2xy^2 - 4)$ vyplýva $5 \mid (2x - 4) = 2(x - 2)$, teda $x = 5n + 2$, kde $5n = x_5$. Z podmienky $5 \mid (y^2 - 1)$ vyplýva tiež $5 \mid (y^4 - 1)$, čiže $(y^4)_5 = y^4 - 1$, teda daná rovnica získava tvar

$$(5n)^2 + (y^4 - 1) = 2 \cdot (5n + 2) \cdot y^2 + 51.$$

Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} (y^4 - 10ny^2 + 25n^2) - 4y^2 &= 52, \\ (y^2 - 5n)^2 - 4y^2 &= 52, \\ (y^2 - 5n - 2y)(y^2 - 5n + 2y) &= 52. \end{aligned} \tag{1}$$

Na ľavej strane poslednej rovnice je súčin dvoch celých čísel líšiacich sa o $4y$, teda o násobok štyroch; pretože $52 = 2^2 \cdot 13$, máme na ľavej strane (1) súčin čísel 2 a 26 alebo súčin čísel -2 a -26. Tak či onak platí $|4y| = 26 - 2 = 24$, odkiaľ $y = \pm 6$, takže menší z oboch činiteľov v (1) je rovný $6^2 - 5n - 12 = 24 - 5n$. Zatiaľ čo rovnica $24 - 5n = 2$ žiadne celočíselné riešenie n nemá, rovnica $24 - 5n = -26$ má riešenie $n = 10$, ktorému zodpovedá $x = 5 \cdot 10 + 2 = 52$. Podmienku $y = 5k \pm 1$ teda spĺňajú práve dve riešenia danej rovnice, a síce $(x, y) = (52, 6)$ a $(x, y) = (52, -6)$.

Prípad $y = 5k \pm 2$. Pretože $y^2 = 25k^2 \pm 20k + 4$, platí $5 \mid (y^2 + 1)$, a preto z podmienky $5 \mid (2xy^2 - 4)$ vyplýva $5 \mid (-2x - 4) = -2(x + 2)$, teda $x = 5n - 2$, kde $5n = x_5$. Z podmienky $5 \mid (y^2 + 1)$ vyplýva rovnako $5 \mid (y^4 - 1)$, čiže $(y^4)_5 = y^4 - 1$, teda daná rovnica získava tvar

$$(5n)^2 + (y^4 - 1) = 2 \cdot (5n - 2) \cdot y^2 + 51.$$

Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} (y^4 - 10ny^2 + 25n^2) + 4y^2 &= 52, \\ (y^2 - 5n)^2 + 4y^2 &= 52. \end{aligned} \tag{2}$$

Oba sčítance na ľavej strane poslednej rovnice sú nezáporné, takže neprevyšujú číslo 52 z pravej strany. Z nerovnosti $4y^2 \leqq 52$ vyplýva $y^2 \leqq 13$, čo vzhľadom na podmienku $y = 5k \pm 2$ znamená, že buď $y = \pm 2$, alebo $y = \pm 3$. Ak $y = \pm 2$, je rovnica (2) splnená práve vtedy, keď $(4-5n)^2 = 36$, čo nastane pre jediné celé číslo $n = 2$, ktorému zodpovedá $x = 5 \cdot 2 - 2 = 8$. Ak $y = \pm 3$, prejde (2) na rovnicu $(9-5n)^2 = 16$ s jediným celočíselným koreňom $n = 1$, ktorému zodpovedá $x = 5 \cdot 1 - 2 = 3$. Podmienku $y = 5k \pm \pm 2$ teda spĺňajú práve štyri riešenia (x, y) danej rovnice, a síce dvojice $(8, 2)$, $(8, -2)$, $(3, 3)$ a $(3, -3)$.

Odpoveď. Daná rovnica má v obore celých čísel celkom šesť riešení (x, y), konkrétne dvojice $(52, 6)$, $(52, -6)$, $(8, 2)$, $(8, -2)$, $(3, 3)$ a $(3, -3)$. (Odporúčame urobiť skúšku, aj keď nie je nutnou súčasťou takto podaného riešenia.)

Poznámka. Pre každé celé z je číslo z_5 rovné jednému z čísel $z-2$, $z-1$, z, $z+ +1$ alebo $z+2$ (tomu z nich, ktoré je násobkom piatich). Danú úlohu by bolo možné preto riešiť tak, že by sme danú rovnicu riešili v jednotlivých prípadoch $x = 5n + r$ a $y = 5k + q$, kde čísla r a q prebiehajú (navzájom nezávisle) množinu $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Taká diskusia by však bola zdĺhavá, uvedené riešenie je jej premysleným skrátením.

Uvedomme si, že pri našom postupe sme najskôr vylúčili prípad $q = 0$ a potom sme už rozlíšili len prípady $q = \pm 1$ a $q = \pm 2$. Bolo to umožnené tým, že číslo y^2 má pri delení piatimi zvyšok nezávislý na znamienku čísla q a že podľa tohto zvyšku možno z danej rovnice jednoznačne určiť obdobný zvyšok čísla x, teda hodnotu r.

Posledný „trik“, ktorý sme pri riešení urobili, spočíval v tom, že sme do danej rovnice nedosadzovali vyjadrenie $y = 5k \pm 1$, resp. $y = 5k \pm 2$, čím sa nám o niečo zjednodušil zápis príslušných rovníc (1) a (2). Dodajme ešte, že algebraické úpravy danej rovnice vedúce k rovniciam (1) a (2) patria pri riešení rovníc v obore celých čísel k tým najbežnejším postupom.

---

3. *V danom trojuholníku ABC pretína os uhla ACB stranu AB v bode K a opísanú kružnicu v bode L $(L \neq C)$. Označme V stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC, S stred kružnice opísanej trojuholníku KBV a Z priesečník priamok AB a SL. Dokážte, že priamka SK je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku KLZ.* (J. Földes)

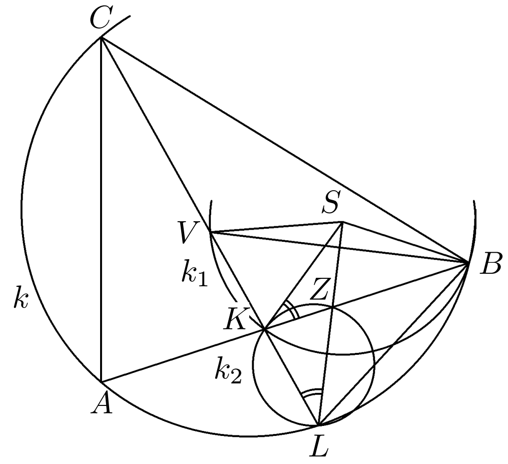
Riešenie. Kružnice opísané trojuholníkom ABC, KBV a KLZ označme po rade k, k_1 a k_2 (obr. 1). Našou úlohou je dokázať, že priamka SK je dotyčnicou kružnice k_2; k tomu stačí vysvetliť, prečo sú zhodné uhly SKZ a KLZ, vyznačené na obr. 1 oblúčikmi. Okrem toho však musíme zdôvodniť, prečo body L a S vždy ležia v opačných polrovinách s hraničnou priamkou AB (ako je to aj na našom obrázku).

Stred V kružnice vpísanej je vždy vnútorným bodom trojuholníka ABC, lebo je priesečníkom osí jeho vnútorných uhlov. Preto je bod V vnútorným bodom úsečky CK, zatiaľ čo bod L leží na jej predĺžení za bod K. Body V a L preto ležia v opačných polrovinách s hraničnou priamkou AB. Keď označíme ako zvyčajne α, β, γ veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC, má trojuholník BCV pri vrcholoch B a C vnútorné uhly veľkostí $\beta/2$ a $\gamma/2$, takže pre jeho vonkajší uhol pri vrchole V platí

$$|\measuredangle BVK| = \frac{\beta + \gamma}{2} < 90°.$$

Uhol BVK je teda ostrý, a preto stred S kružnice k_1 leží v rovnakej polrovine s hraničnou priamkou BK ako bod V, čo spolu s predchádzajúcim tvrdením o polohe bodov V a L znamená, že body L a S naozaj ležia v opačných polrovinách s hraničnou priamkou AB, čo sme potrebovali overiť. Podľa vety o obvodových a stredových uhloch v kružnici k_1 platí

$$|\measuredangle BSK| = 2|\measuredangle BVK| = \beta + \gamma,$$



Obr. 1

z rovnoramenného trojuholníka BKS teda vyplýva

$$|\measuredangle SKZ| = |\measuredangle SKB| = \frac{1}{2}(180^\circ - |\measuredangle BSK|) = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta - \gamma) = \frac{1}{2}\alpha.$$

Zostáva nám preto dokázať, že aj uhol KLZ má veľkosť $\alpha/2$. Urobíme to dvoma nezávislými spôsobmi.

Pri prvom z nich najskôr určíme veľkosť uhla LBV. Pretože $|\measuredangle LBA| = |\measuredangle LCA| = \gamma/2$ (obvodové uhly v kružnici k) a $|\measuredangle ABV| = \beta/2$, vzhľadom na vzájomnú polohu úsečiek LV a AB môžeme písať

$$|\measuredangle LBV| = |\measuredangle LBA| + |\measuredangle ABV| = \frac{1}{2}(\beta + \gamma).$$

Už skôr sme zistili, že takú veľkosť má aj uhol BVK (čiže uhol BVL), a tak je trojuholník BVL rovnoramenný s ramenami BL a VL. Súčasne však platí $|BS| = |VS|$, takže oba body L a S ležia na osi úsečky BV (štvoruholník $BLVS$ je teda deltoid, prípadne kosoštvorec alebo štvorec). Odtiaľ vyplýva, že úsečky BV a SL sú navzájom kolmé, uhol KLZ je preto doplnkový k uhlu BVK, t. j.

$$|\measuredangle KLZ| = 90^\circ - |\measuredangle BVK| = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) = \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

Pri druhom spôsobe určenia veľkosti uhla KLZ si najskôr všimneme, že platí $|\measuredangle BLK| = |\measuredangle BLC| = |\measuredangle BAC| = \alpha$ (obvodové uhly v kružnici k), čo spolu so skôr odvodenou rovnosťou $|\measuredangle BSK| = \beta + \gamma$ znamená, že v štvoruholníku $BLKS$ je súčet vnútorných uhlov pri protiľahlých vrcholoch L a S rovný 180°, jedná sa preto o štvoruholník, ktorému sa dá opísať kružnica. V nej sú KBS a KLS zhodné obvodové uhly nad tetivou KS, a preto platí

$$|\measuredangle KLZ| = |\measuredangle KLS| = |\measuredangle KBS| = \tfrac{1}{2}\alpha$$

(pripomíname, že BKS je rovnoramenný trojuholník s uhlami $\alpha/2$ pri základni BK).

4. *Nech $n \geqq 2$ je dané prirodzené číslo. Pre ktoré hodnoty reálneho parametra p má sústava rovníc*

$$\begin{aligned} x_1^4 + \frac{2}{x_1^2} &= px_2, \\ x_2^4 + \frac{2}{x_2^2} &= px_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1}^4 + \frac{2}{x_{n-1}^2} &= px_n, \\ x_n^4 + \frac{2}{x_n^2} &= px_1 \end{aligned}$$

aspoň dve riešenia v obore reálnych čísel? (*J. Švrček*)

Riešenie. Pretože daná sústava je veľmi zložitá a zrejme neexistuje postup, ako v konečnom algebraickom tvare vyjadriť všetky jej riešenia, budeme jednak premýšľať o podmienkach riešiteľnosti tejto sústavy, jednak hľadať niektoré jej špeciálne riešenia.

Všimnime si najskôr, že daná sústava nemá žiadne riešenie pre hodnotu $p = 0$, pretože hodnoty ľavých strán rovníc sú kladné čísla. Tiež druhé zistenie, ktoré teraz uvedieme, je zrejmé: n-tica čísel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je riešením danej sústavy s hodnotou parametra p práve vtedy, keď n-tica opačných čísel $(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ je riešením danej sústavy s opačnou hodnotou parametra $-p$. Hodnoty ľavých aj pravých strán všetkých rovníc sústavy sa totiž pri zmene všetkých hodnôt $x_i \mapsto -x_i$ a $p \mapsto -p$ nezmenia, pretože pre ľubovoľné $x \neq 0$ a p platí

$$(-x)^4 + \frac{2}{(-x)^2} = x^4 + \frac{2}{x^2} \quad \text{a} \quad (-p)(-x) = px.$$

Daná sústava s hodnotou parametra p má teda práve toľko riešení, koľko ich má daná sústava s hodnotou parametra $-p$. Budeme preto hľadať iba všetky kladné čísla p, pre ktoré má daná sústava aspoň dve riešenia (a v odpovedi k nim pripojíme všetky opačné čísla $-p$.)

Až po záver riešenia budeme teda uvažovať iba kladné hodnoty parametra p danej sústavy. Z kladnosti jej ľavých strán vyplýva, že aj všetky pravé strany px_i musia byť kladné, a preto (vzhľadom na predpoklad $p > 0$) musí platiť $x_i > 0$ pre každé i. Ľubovoľné riešenie $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ danej sústavy je teda zostavené z n kladných čísel.

Predpokladajme teraz, že pre dané $p > 0$ nejaké riešenie $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ danej sústavy existuje a všetkých n rovníc medzi sebou vynásobme. Pre kladné čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ tak dostaneme rovnosť

$$\left(x_1^4 + \frac{2}{x_1^2}\right)\left(x_2^4 + \frac{2}{x_2^2}\right)\dots\left(x_n^4 + \frac{2}{x_n^2}\right) = p^n x_1 x_2 \dots x_n. \tag{1}$$

Každý činiteľ na ľavej strane odhadneme zdola podľa známej nerovnosti

$$u + v \geqq 2\sqrt{uv},$$

ktorá platí pre ľubovoľné kladné čísla u a v, pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď $u = v$ (je to v podstate nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom čísel u a v, vyplývajúca jednoducho zo zrejmej nerovnosti $(\sqrt{u}-\sqrt{v})^2 \geqq 0$). Preto pre každý index i platí

$$x_i^4 + \frac{2}{x_i^2} \geqq 2\sqrt{x_i^4 \cdot \frac{2}{x_i^2}} = |x_i| \cdot 2\sqrt{2} = x_i \cdot 2\sqrt{2}. \tag{2}$$

Dôsledkom rovnosti (1) je teda nerovnosť

$$\bigl(x_1 2\sqrt{2}\bigr)\bigl(x_2 2\sqrt{2}\bigr) \ldots \bigl(x_n 2\sqrt{2}\bigr) \leqq p^n x_1 x_2 \ldots x_n, \tag{3}$$

z ktorej po krátení (kladným) súčinom $x_1 x_2 \ldots x_n$ dostaneme podmienku na číslo p v tvare

$$p^n \geqq (2\sqrt{2})^n, \quad \text{čiže} \quad p \geqq 2\sqrt{2}.$$

Sformulujme, čo sme práve zistili. Ak má daná sústava pre pevné $p > 0$ aspoň jedno riešenie, tak pre toto číslo p platí odhad $p \geqq 2\sqrt{2}$.

Pre „krajnú“ hodnotu $p = 2\sqrt{2}$ teraz danú sústavu úplne vyriešime, t. j. nájdeme všetky jej riešenia. Ak $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je ľubovoľné riešenie danej sústavy s hodnotou $p = 2\sqrt{2}$, tak podľa úvah z predchádzajúceho odstavca nastane v nerovnosti (3) rovnosť, čo je možné jedine tak, že rovnosti nastanú vo všetkých násobených nerovnostiach (2). Preto vtedy pre každý index i platí

$$x_i^4 = \frac{2}{x_i^2}, \quad \text{neboli} \quad x_i^6 = 2, \quad \text{t. j.} \quad x_i = \sqrt[6]{2}.$$

Pre hodnotu $p = 2\sqrt{2}$ má teda daná sústava jediné (!) riešenie

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigl(\sqrt[6]{2}, \sqrt[6]{2}, \ldots, \sqrt[6]{2}\bigr).$$

Z výsledkov predchádzajúcich dvoch odstavcov vyplýva, že ak má daná sústava pre pevné $p > 0$ aspoň dve riešenia, tak pre toto číslo p platí ostrá nerovnosť $p > 2\sqrt{2}$. Ak teda nájdeme dve riešenia danej sústavy s ľubovoľnou hodnotou parametra $p > 2\sqrt{2}$, budeme poznať odpoveď na otázku zo zadania úlohy. Spomenuté dve riešenia budeme hľadať medzi n-ticami $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zloženými z n rovnakých čísel; taká n-tica $(x, x, \ldots, x)$ je zrejme riešením danej sústavy práve vtedy, keď je číslo x riešením (jedinej) rovnice

$$x^4 + \frac{2}{x^2} = px, \quad \text{čiže} \quad x^6 - px^3 + 2 = 0.$$

Posledná rovnica je kvadratická vzhľadom na neznámu $y = x^3$ a má v obore reálnych čísel y dve rôzne riešenia

$$y_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 8}}{2}$$

pre každú z nami uvažovaných hodnôt $p > 2\sqrt{2}$, lebo pre ne platí $p^2 - 8 > 0$. Pre každé také p má teda pôvodná sústava dve riešenia

$$(x_1, \ldots, x_n) = \bigl(\sqrt[3]{y_1}, \ldots, \sqrt[3]{y_1}\bigr) \quad \text{a} \quad (x_1, \ldots, x_n) = \bigl(\sqrt[3]{y_2}, \ldots, \sqrt[3]{y_2}\bigr).$$

(Nevylučujeme, že okrem týchto riešení vtedy existujú aj riešenia iné, totiž také, že $x_i \neq x_j$ pre niektoré $i \neq j$.)

Odpoveď. Všetky hľadané hodnoty p tvoria množinu $\bigl(-\infty; -2\sqrt{2}\bigr) \cup \bigl(2\sqrt{2}; \infty\bigr)$.

5. *Nájdite všetky mnohočleny $P(x)$ s reálnymi koeficientmi, ktoré pre každé reálne číslo x spĺňajú rovnosť*

$$(x+1)\,P(x-1)+(x-1)\,P(x+1)=2x\,P(x).$$

(*E. Kováč*)

Riešenie. Dvoma odlišnými spôsobmi ukážeme, že vyhovujúce mnohočleny sú práve mnohočleny tvaru $P(x) = ax^3 - ax + d$, kde a a d sú ľubovoľné reálne čísla. Pri prvom spôsobe použijeme metódu, ktorá je užitočná aj pri riešení mnohých iných úloh o mnohočlenoch; nazýva sa „metóda neurčitých koeficientov“. Ako zvyčajne budeme členy mnohočlenov zapisovať v zostupnom poradí podľa mocnín premennej x; pomocou prvých koeficientov hľadaného mnohočlena

$$P(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + dx^{n-3} + \cdots \tag{1}$$

vyjadríme prvé koeficienty oboch strán danej rovnice a potom ich porovnáme. Zápisom (1) sme naznačili, že budeme skutočne počítať s prvými štyrmi koeficientmi mnohočlena $P(x)$. Ukáže sa totiž, že výpočty s menším počtom koeficientov k vyriešeniu úlohy nestačia. Aby sme pre mnohočleny stupňa najviac 3 nemuseli robiť ďalšie samostatné výpočty, nebudeme zatiaľ predpokladať, že koeficient a pri mocnine x^n v zápise (1) je nenulový.

Nájdeme najskôr prvé členy mnohočlena $P(x-1)$.

$$\begin{aligned}
P(x-1) &= a(x-1)^n + b(x-1)^{n-1} + c(x-1)^{n-2} + d(x-1)^{n-3} + \cdots = \\
&= a\bigl(x^n - \tbinom{n}{1}x^{n-1} + \tbinom{n}{2}x^{n-2} - \tbinom{n}{3}x^{n-3} + \cdots\bigr) + \\
&\quad + b\bigl(x^{n-1} - \tbinom{n-1}{1}x^{n-2} + \tbinom{n-1}{2}x^{n-3} - \cdots\bigr) + \\
&\quad + c\bigl(x^{n-2} - \tbinom{n-2}{1}x^{n-3} + \cdots\bigr) + d\bigl(x^{n-3} - \cdots\bigr) + \cdots = \\
&= ax^n + \bigl[-\tbinom{n}{1}a + b\bigr]x^{n-1} + \bigl[\tbinom{n}{2}a - \tbinom{n-1}{1}b + c\bigr]x^{n-2} + \\
&\quad + \bigl[-\tbinom{n}{3}a + \tbinom{n-1}{2}b - \tbinom{n-2}{1}c + d\bigr]x^{n-3} + \cdots
\end{aligned}$$

Podobným výpočtom zistíme, že

$$\begin{aligned}
P(x+1) = ax^n &+ \bigl[\tbinom{n}{1}a + b\bigr]x^{n-1} + \bigl[\tbinom{n}{2}a + \tbinom{n-1}{1}b + c\bigr]x^{n-2} + \\
&+ \bigl[\tbinom{n}{3}a + \tbinom{n-1}{2}b + \tbinom{n-2}{1}c + d\bigr]x^{n-3} + \cdots
\end{aligned}$$

Teraz môžeme určiť prvé členy mnohočlena $(x+1)P(x-1) + (x-1)P(x+1)$, totiž členy s mocninami x^{n+1}, x^n, x^{n-1} a x^{n-2} (vypísali sme ich dopredu, aby sme pri nasledujúcom výpočte zbytočne nevypisovali členy s nižšími mocninami x).

$$\begin{aligned}
&(x+1)P(x-1)+(x-1)P(x+1)=\\
&=xP(x-1)+P(x-1)+xP(x+1)-P(x+1)=\\
&=ax^{n+1}+\left[-\tbinom{n}{1}a+b\right]x^n+\left[\tbinom{n}{2}a-\tbinom{n-1}{1}b+c\right]x^{n-1}+\\
&\quad+\left[-\tbinom{n}{3}a+\tbinom{n-1}{2}b-\tbinom{n-2}{1}c+d\right]x^{n-2}+\dots+\\
&\quad+ax^n+\left[-\tbinom{n}{1}a+b\right]x^{n-1}+\left[\tbinom{n}{2}a-\tbinom{n-1}{1}b+c\right]x^{n-2}+\dots+\\
&\quad+ax^{n+1}+\left[\tbinom{n}{1}a+b\right]x^n+\left[\tbinom{n}{2}a+\tbinom{n-1}{1}b+c\right]x^{n-1}+\\
&\quad+\left[\tbinom{n}{3}a+\tbinom{n-1}{2}b+\tbinom{n-2}{1}c+d\right]x^{n-2}+\dots-\\
&\quad-ax^n-\left[\tbinom{n}{1}a+b\right]x^{n-1}-\left[\tbinom{n}{2}a+\tbinom{n-1}{1}b+c\right]x^{n-2}-\dots=\\
&=2ax^{n+1}+2bx^n+\left[2\tbinom{n}{2}a-2\tbinom{n}{1}a+2c\right]x^{n-1}+\\
&\quad+\left[2\tbinom{n-1}{2}b-2\tbinom{n-1}{1}b+2d\right]x^{n-2}+\cdots
\end{aligned}$$

Našli sme prvé členy ľavej strany danej rovnice. Vypísať prvé členy jej pravej strany je ľahké.

$$2xP(x)=2ax^{n+1}+2bx^n+2cx^{n-1}+2dx^{n-2}+\cdots.$$

Vidíme, že prvé dva členy ľavej strany sa zhodujú s prvými dvoma členmi pravej strany, nech je mnohočlen $P(x)$ vybraný akokoľvek. Tretie a štvrté členy sa už vo všeobecnosti nezhodujú a ich rovnosti sú vyjadrené podmienkami

$$2\binom{n}{2}a-2\binom{n}{1}a+2c=2c\quad\text{a}\quad 2\binom{n-1}{2}b-2\binom{n-1}{1}b+2d=2d,$$

z ktorých po rozpísaní kombinačných čísel dostaneme rovnice tvaru $n(n-3)a=0$ a $(n-1)(n-4)b=0$. (Všimnime si, že rovnica pre koeficient b sa líši od rovnice pre koeficient a iba tým, že je v nej číslo n nahradené číslom $n-1$. Koeficient b totiž prevezme rolu „vedúceho“ koeficientu a, keď v zápise (1) vynecháme prvý člen súčtu (čím znížime stupeň n o jedna)). V prípade $n>3$ teda musí platiť $a=0$, čo znamená, že sa môžeme obmedziť len na prípad $n=3$. Vtedy je prvá rovnica splnená pre každé $a\in\mathbb{R}$, zatiaľ čo z druhej rovnice vyplýva $b=0$. Hľadaný mnohočlen $P(x)$ má preto nutne tvar

$$P(x)=ax^3+cx+d \tag{2}$$

a po dosadení ľubovoľného takého mnohočlena do oboch strán danej rovnice dostaneme dva mnohočleny, ktoré sa zhodujú v prvých členoch s mocninami x^4, x^3, x^2 a x^1. Zostáva teda porovnať posledné (absolútne) členy oboch mnohočlenov

$$(x+1)P(x-1)+(x-1)P(x+1)\quad\text{a}\quad 2xP(x).$$

Namiesto algebraického výpočtu využijeme zvyčajný postup, ktorý je založený na tomto zrejmom tvrdení: Absolútny člen mnohočlena p je jeho hodnota $p(0)$ v bode 0. V našom prípade preto zistíme, kedy platí rovnosť $P(-1)-P(1)=0\cdot P(0)$, teda podľa (2)

$$(-a-c+d)-(a+c+d)=0.$$

Je to zrejme práve vtedy, keď $c = -a$. Preto sú riešeniami úlohy práve mnohočleny tvaru $P(x) = ax^3 - ax + d$, kde a, d sú ľubovoľné reálne čísla.

Iné riešenie. Využijeme postup, ktorý sa používa pri riešení funkcionálnych rovníc. Získavame pri ňom významné informácie o neznámych funkciách tak, že do rovníc, ktoré hľadané funkcie spĺňajú, opakovane dosadzujeme vhodne vybrané hodnoty premenných. (To sme vlastne urobili aj v závere „algebraického" riešenia, keď na určenie absolútneho člena sme do mnohočlena dosadili hodnotu $x = 0$.) Nech je teda P ľubovoľný mnohočlen spĺňajúci v premennej $x \in \mathbb{R}$ danú rovnicu. Keď do nej dosadíme najskôr hodnotu $x = 1$ a potom hodnotu $x = -1$, dostaneme rovnosti

$$2 \cdot P(0) + 0 \cdot P(2) = 2 \cdot P(1) \quad \text{a} \quad 0 \cdot P(-2) - 2 \cdot P(0) = -2 \cdot P(-1),$$

z ktorých vyplýva, že $P(1) = P(0) = P(-1)$. Preto ak označíme $P(0) = d$, má rovnica $P(x) = d$ korene $x = 0$, $x = 1$ a $x = -1$. Existuje teda mnohočlen $Q(x)$ taký, že $P(x) = x(x-1)(x+1)Q(x) + d$. Toto vyjadrenie dosadíme do danej rovnice, aby sme zistili, aké podmienky musí spĺňať mnohočlen $Q(x)$ a koeficient d.

$$\begin{aligned}(x+1)x(x-1)(x-2)Q(x-1) + d(x+1) &+ \\ +(x-1)(x+1)x(x+2)Q(x+1) + d(x-1) &= \\ = 2x^2(x-1)(x+1)Q(x) + 2dx&.\end{aligned}$$

Členy s koeficientom d sa v poslednej rovnici navzájom eliminujú a zvyšné členy možno vykrátiť spoločným činiteľom $x(x-1)(x+1)$. Získame tak rovnicu

$$(x-2)Q(x-1) + (x+2)Q(x+1) = 2xQ(x) \tag{3}$$

pre neznámy mnohočlen $Q(x)$. Zo spôsobu odvodenia vyplýva, že rovnica (3) platí pre každé $x \in \mathbb{R}$, ktoré sú rôzne od 0, 1 a -1; pretože však obe strany (3) sú mnohočleny premennej x, ktoré majú rovnakú hodnotu pre nekonečne veľa čísel x, musia to byť mnohočleny totožné, a preto rovnosť (3) platí aj pre $x \in \{0, 1, -1\}$.

Pretože $a(x-2) + a(x+2) = 2ax$, rovnicu (3) spĺňa každý konštantný mnohočlen $Q(x) = a$. Pôvodnej rovnici preto vyhovuje každý mnohočlen

$$P(x) = x(x-1)(x+1)a + d = ax^3 - ax + d \quad (a, d \in \mathbb{R}).$$

Iné vyhovujúce mnohočleny $P(x)$ neexistujú, ak ukážeme, že každý mnohočlen $Q(x)$ spĺňajúci rovnicu (3) je konštantný. Nech je teda $Q(x)$ ľubovoľný taký mnohočlen; označme $Q(2) = a$ a dosaďme do rovnice (3) hodnotu $x = 2$. Dostaneme

$$0 \cdot Q(1) + 4Q(3) = 4Q(2), \quad \text{odkiaľ} \quad Q(3) = Q(2) = a.$$

Teraz voľbou $x = 3$ v rovnici (3) získame rovnosť

$$Q(2) + 5Q(4) = 6Q(3), \quad \text{odkiaľ} \quad Q(4) = \frac{6Q(3) - Q(2)}{5} = \frac{6a - a}{5} = a.$$

Ďalej voľbou $x = 4$ zistíme, že $Q(5) = a$, atď. Dokážme preto indukciou, že $Q(n) = a$ pre každé celé $n \geqq 2$. Ak pre nejaké n platia rovnosti $Q(n) = Q(n+1) = a$ (tak ako pre $n = 2$), tak voľbou $x = n + 1$ v rovnici (3) dostaneme

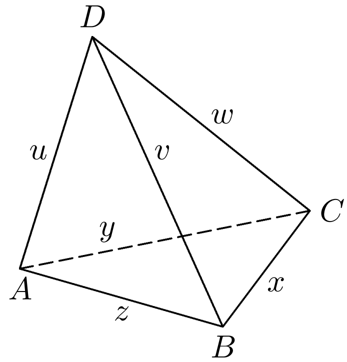
$$\begin{aligned} Q(n+2) &= \frac{2(n+1)Q(n+1) - (n-1)Q(n)}{n+3} = \\ &= \frac{2(n+1)a - (n-1)a}{n+3} = a. \end{aligned}$$

Dôkaz indukciou je hotový. Zistili sme, že rovnosť $Q(x) = a$ platí pre nekonečne veľa čísel x, čo je možné jedine vtedy, keď $Q(x) = a$ pre každé x (keby bol Q mnohočlen nejakého stupňa $N > 0$, mala by rovnica $Q(x) = a$ najviac N koreňov). Celé riešenie je tým ukončené.

---

6. *Nájdite všetky štvorsteny, ktoré majú sieť tvaru deltoidu a práve štyri hrany danej dĺžky a. (Deltoidom rozumieme konvexný štvoruholník, ktorý je súmerný podľa jedinej zo svojich uhlopriečok, nepatrí k nim ani štvorec, ani kosoštvorec.)* (P. Leischner)

Riešenie. V prvej (podstatnejšej) časti riešenia nájdeme všetky štvorsteny, ktoré majú sieť tvaru deltoidu; potom už pomerne jednoducho zistíme, ktoré z nájdených štvorstenov majú práve štyri zhodné hrany.

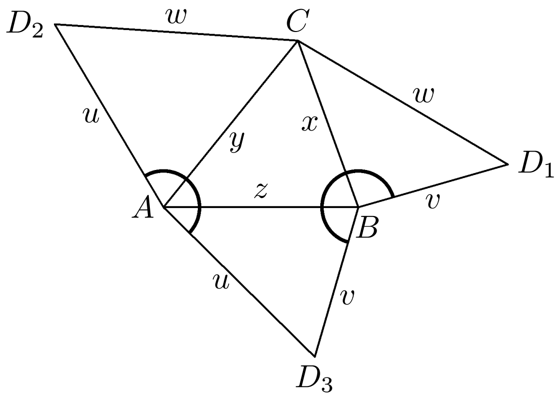


Obr. 2

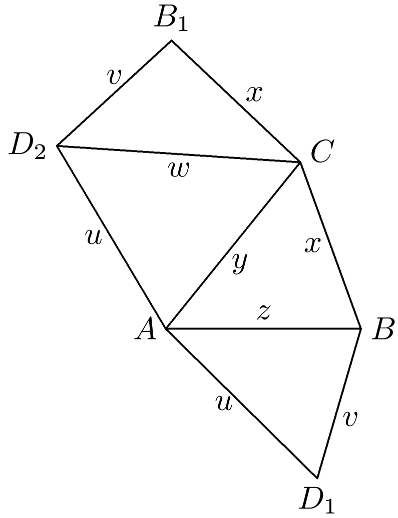
Uvažujme preto ľubovoľný štvorsten $ABCD$ a označme dĺžky jeho hrán písmenami x, y, z, u, v, w podľa obr. 2. Všetky siete štvorstenu $ABCD$ rozdelíme do dvoch skupín. Do prvej z nich zaradíme tie siete, v ktorých niektorá stena štvorstena susedí s tromi ostatnými stenami; do druhej skupiny budú patriť ostatné siete, v ktorých každá stena susedí najviac s dvoma stenami. Pretože sme označenie vrcholov štvorstenu dopredu nijako neupresnili, budeme ďalej uvažovať len po jednej sieti z každej z oboch skupín, teda siete znázornené na obr. 3 a 4. Zaoberajme sa každou z nich samostatne.

Sieť na obr. 3 je (vo všeobecnosti) šesťuholníkom $AD_3BD_1CD_2$, štvoruholník to bude len vtedy, keď dva z jeho uhlov pri vrcholoch A, B, C budú priame (t. j. budú mať veľkosť 180°). Je totiž jasné, že priamy uhol nemôže byť pri žiadnom z vrcholov D_1, D_2, D_3. Vzhľadom na už spomenutú všeobecnosť označenia predpokladajme, že priame sú uhly D_2AD_3 a D_3BD_1 (vyznačené na obr. 3). Naša sieť je teda štvoruholníkom $D_2D_3D_1C$, ktorého strany majú (v poradí, v akom za sebou cyklicky nasledujú) dĺžky $2u$, $2v$, w a w. Ak je tento štvoruholník deltoid (a nie kosoštvorec), musí zrejme platiť $u = v$ a $2u \neq w$ (obr. 5a). Z osovej súmernosti podľa priamky D_3C potom zisťujeme, že platí $y = x$; štvorsten s „deltoidnou“ sieťou z obr. 5a vidno na obr. 5b. Je to štvorsten súmerný podľa roviny súmernosti hrany AB. Dodajme, že okrem nerovnosti $2u \neq w$ musí platiť rovnako nerovnosť $z < w$, ktorá vyplýva z vlastnosti strednej priečky AB trojuholníka $D_1D_2D_3$ a trojuholníkovej nerovnosti pre rovnoramenný trojuholník CD_1D_2:

$$2z = 2|AB| = |D_1D_2| < |D_1C| + |D_2C| = 2w.$$



Obr. 3



Obr. 4

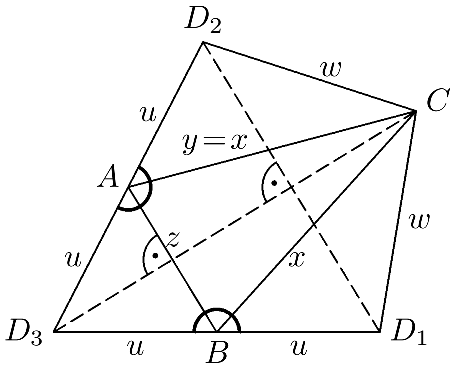
Sieť z obr. 4 je (vo všeobecnosti) šesťuholníkom $AD_1BCB_1D_2$, štvoruholníkom bude len v tých prípadoch, keď práve dva z jeho uhlov pri vrcholoch A, B, C, D_2 budú priame (také totiž nemôžu byť uhly pri vrcholoch D_1 a B_1). Vzhľadom na všeobecnosť označenia stačí uvažovať len tri nasledujúce prípady.

a) *Priame uhly pri vrcholoch A a D_2*. Sieť je štvoruholník B_1D_1BC, ktorého strany majú v poradí dĺžky $2u + v$, v, x, x. Zrejme sa nejedná o deltoid, lebo $2u + v \neq v$.

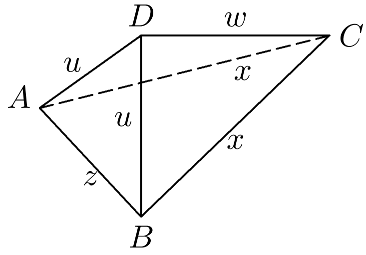
b) *Priame uhly pri vrcholoch A a C*. Sieť je štvoruholník $D_2D_1BB_1$, ktorého strany majú v poradí dĺžky $2u$, v, $2x$, v. Pretože dvojica protiľahlých strán má rovnakú dĺžku v, nejedná sa o deltoid.

c) *Priame uhly pri vrcholoch A a B*. Sieť je štvoruholník $D_2D_1CB_1$, ktorého strany majú v poradí dĺžky $2u$, $x+v$, x, v. Ak je to deltoid, vzhľadom na nerovnosť $x+v > x$ musí platiť $2u = x + v$ a $x = v$, teda $x = u = v$. V trojuholníku D_2D_1C je úsečka AB strednou priečkou (obr. 6a), takže platí $w = |D_2C| = 2|AB| = 2z$. Príslušný štvorsten vidno na obr. 6b.

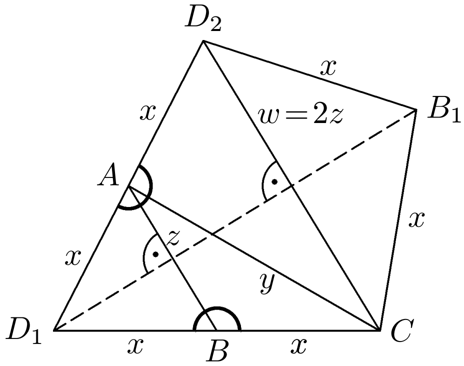
Zhrňme výsledky našich doterajších úvah. Iba dva typy štvorstenov (obr. 5b a 6b) majú sieť tvaru deltoidu. Našou úlohou je teraz zistiť, kedy tieto štvorsteny majú práve štyri zhodné hrany (danej dĺžky a). Zaoberajme sa najskôr štvorstenom z obr. 5b, ktorého hrany majú dĺžky x, x, z, u, u, w. Predpokladajme teda, že práve štyri z nich sú rovné a. Ktoré to sú? Určite $x = a$, inak by muselo platiť $a = z = u = w$, čo je ale v spore s nerovnosťou $z < w$, ktorú sme odvodili skôr. Pretože sú vylúčené aj rovnosti $z = u$ a $u = w$ (v oboch prípadoch by dĺžku a malo päť hrán štvorstena $ABCD$), musí platiť $u = a$. V prípade $x = u$ je však štvoruholník AD_3BC kosoštvorec; z rovnobežnosti



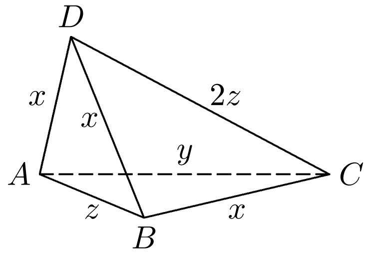
Obr. 5a



Obr. 5b



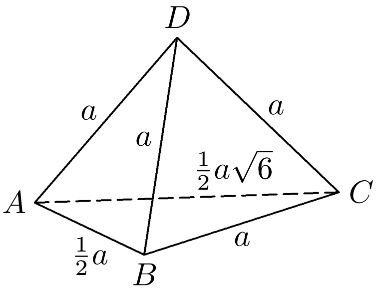
Obr. 6a



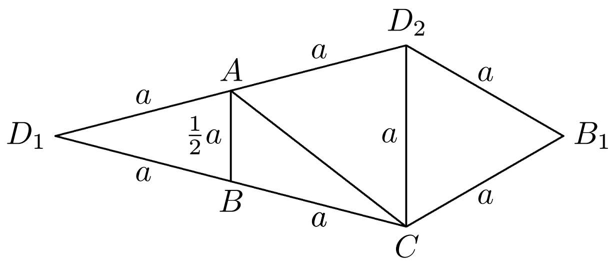
Obr. 6b

priamok AC a D_3B vyplýva rovnosť súhlasných uhlov CAD_2 a BD_3A. Rovnoramenné trojuholníky CAD_2 a BD_3A sú vtedy zhodné podľa vety *sus*, takže $|D_2C| = |AB|$, čiže $z = w$, čo je opäť spor. (V prípade $w = z$ má „deltoidná“ sieť z obr. 5a priamy uhol pri vrchole C, takže sa nejedná o deltoid, ale o trojuholník.) Žiadny štvorsten z obr. 5b preto nie je riešením našej úlohy. Prejdime teraz k druhému typu štvorstenov a predpokladajme, že práve štyri z hrán niektorého štvorstena $ABCD$ z obr. 6b majú dĺžku a. Pretože tri jeho hrany majú dĺžku x, musí platiť $x = a$. Ktorá (jediná) z ostatných dĺžok y, z, $2z$ je rovná a? V sieti na obr. 6a z trojuholníka B_1CD_2 vyplýva $x + x > 2z$, teda $x > z$. V rovnakej sieti má trojuholník ABC tupý vnútorný uhol pri vrchole B, lebo jeho vonkajší uhol ABD_1 je vnútorným uhlom pri základni AB rovnoramenného trojuholníka ABD_1, takže je nutne ostrý. Preto je najdlhšou stranou trojuholníka ABC strana AC, čo zapíšeme $y > \max\{x, z\}$. Spolu dostávame $y > x > > z$, s ohľadom na rovnosť $x = a$ preto zostáva iba možnosť $2z = a$. Nájdenými podmienkami je už štvorsten $ABCD$ jednoznačne (až na zhodnosť) určený. Dĺžku y poslednej hrany AC vypočítame ako ťažnicu na stranu D_1D_2 trojuholníka CD_1D_2 so stranami $2a$, $2a$, a. Vyjde nám $y = a\sqrt{6}/2$. Riešením našej úlohy je jediný štvorsten z obr. 7a, jeho sieť tvaru deltoidu je na obr. 7b.

Odpoveď. Hľadaný štvorsten je jediný. Jeho tri hrany dĺžky a vychádzajú z jedného vrcholu, hrany protiľahlej steny majú dĺžky a, $a/2$, $a\sqrt{6}/2$. Jedna zo sietí tohto štvorstenu má tvar deltoidu so stranami a, a, $2a$, $2a$.


D
a
a
a
A
$\frac{1}{2}a\sqrt{6}$
C
$\frac{1}{2}a$
B
a

Obr. 7a


D_2
a
A
a
a
D_1
$\frac{1}{2}a$
a
B_1
a
B
a
a
C

Obr. 7b