2017/2018
67. ročník MO *Zadania úloh celoštátneho kola kategórie A*

(*Súťaž sa konala 18. – 21. 3. 2018.*)

1. V spoločnosti ľudí sú niektoré dvojice spriatelené. Pre kladné celé číslo $k \geqq 3$ hovoríme, že spoločnosť je k-dobrá, ak možno každú k-ticu ľudí zo spoločnosti rozsadiť okolo okrúhleho stola tak, že sa každí dvaja susedia priatelia. Dokážte, že ak je spoločnosť 6-dobrá, tak je aj 7-dobrá. (*Josef Tkadlec*)

2. Reálne čísla x, y, z sú zvolené tak, že čísla

$$\frac{1}{|x^2+2yz|}, \quad \frac{1}{|y^2+2zx|}, \quad \frac{1}{|z^2+2xy|}$$

sú dĺžkami strán (nedegenerovaného) trojuholníka. Určte všetky možné hodnoty výrazu $xy + yz + zx$. (*Michal Rolínek*)

3. Daný je trojuholník ABC. Os uhla pri vrchole A pretína stranu BC v bode D. Označme E, F stredy kružníc opísaných trojuholníkom ABD, ACD. Akú veľkosť môže mať uhol BAC, ak stred kružnice opísanej trojuholníku AEF leží na priamke BC? (*Patrik Bak*)

4. Uvažujme ľubovoľnú trojicu celých čísel a, b a c, ktoré sú dĺžkami strán trojuholníka, nemajú spoločného deliteľa väčšieho ako 1 a pre ktoré sú hodnoty všetkých troch zlomkov

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{a+b-c}, \quad \frac{b^2+c^2-a^2}{b+c-a}, \quad \frac{c^2+a^2-b^2}{c+a-b}$$

celočíselné. Dokážte, že súčin menovateľov týchto troch zlomkov alebo jeho dvojnásobok je druhou mocninou celého čísla. (*Jaromír Šimša*)

5. Daný je rovnoramenný lichobežník $ABCD$ s dlhšou základňou AB. Označme I stred kružnice vpísanej do trojuholníka ABC a J stred kružnice pripísanej k strane AD trojuholníka ACD. Dokážte, že priamky IJ a AB sú rovnobežné. (*Patrik Bak*)

6. Nájdite najmenšie prirodzené číslo n také, že pre ľubovoľné ofarbenie čísel 1, 2, 3, $\ldots$, n tromi farbami existujú medzi uvedenými číslami dve čísla rovnakej farby, ktorých rozdiel je druhá mocnina prirodzeného čísla.
(*Vojtech Bálint, Michal Rolínek, Josef Tkadlec*)