67. ročník Matematickej olympiády
2017/2018 *Riešenia úloh krajského kola kategórie Z9*

<u>*Informácia pre krajskú komisiu MO:*</u>

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 12 alebo viac bodov.

---

1. *Vo finále súťaže spoločenských tancov mal každý z dvadsiatich piatich porotcov ohodnotiť päť tanečných párov známkami 1 až 5 ako v škole, pričom každú známku musel použiť práve raz. Po súťaži bola zverejnená tabuľka s priemermi známok pre každý pár:*

pár A	*pár B*	*pár C*	*pár D*	*pár E*
4,68	*3,86*	*3,36*	*1,44*	*1,60*

Vzápätí sa zistilo, že práve jeden z priemerov je v tabuľke uvedený zle. Zistite, ktorý priemer je chybný, a opravte ho.
Jedným z porotcov bol strýko tanečníka páru E. Páry však hodnotil čestne a bez zaujatosti nasledujúcim spôsobom: 1 pre D, 2 pre E, 3 pre B, 4 pre C a 5 pre A. Napriek tomu mu po vyhlásení opravených výsledkov vŕtalo v hlave, či by býval mohol nepoctivým oznámkovaním posunúť pár E na prvé miesto. Zistite, či to mohol dokázať.

(*Libor Šimůnek*)

Riešenie. Priemer známok každého páru je rovný súčtu všetkých jemu pridelených známok vydelenému číslom 25. Súčty známok jednotlivých párov by tak mali byť:

$$4{,}68 \cdot 25 = 117, \quad 3{,}86 \cdot 25 = 96{,}5, \quad 3{,}36 \cdot 25 = 84, \quad 1{,}44 \cdot 25 = 36, \quad 1{,}60 \cdot 25 = 40.$$

Vidíme, že súčet známok pri páre B nie je prirodzené číslo, výsledok tohto páru bol teda chybný. Teraz ho opravíme. Súčet všetkých známok udelených v súťaži bol

$$25 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 25 \cdot 15 = 375.$$

Odčítame súčty známok udelených párom A, C, D, E a získame súčet známok udelených páru B:

$$375 - 117 - 84 - 36 - 40 = 375 - 277 = 98.$$

Správny priemer známok udelených páru B bol teda

$$98 : 25 = 3{,}92.$$

Ak by chcel spomenutý porotca čo najviac prospieť páru E, mohol namiesto známky 2 udeliť 1. Tým by sa súčet známok páru E zmenšil z 40 na 39. Aby páru D čo najviac uškodil, mohol namiesto známky 1 udeliť 5 a súčet jeho známok tak zväčšiť z 36 na 40. V takom prípade by výsledok páru D bol horší ako výsledok páru E. Spomenutý porotca teda mohol nepoctivým oznámkovaním posunúť pár E na prvé miesto.

Návrh hodnotenia. 2 body za určenie chybného priemeru; 2 body za jeho opravu; 2 body za riešenie zvyšnej časti úlohy.

Poznámka. Násobenie 25 je to isté ako násobenie 100 nasledované delením 4. Chybný priemer možno teda odhaliť kontrolou, či dvojčíslie za desatinnou čiarkou je deliteľné štyrmi. Správny priemer páru B možno (bez roznásobovania 25 a následného delenia tým istým číslom) určiť takto:

$$15 - 4{,}68 - 3{,}36 - 1{,}44 - 1{,}60 = 3{,}92.$$

---

2. *Každé z čísel a a b sa dá vyjadriť ako súčin troch prvočísel menších ako 10. Každé prvočíslo menšie ako 10 je prítomné v rozklade aspoň jedného z čísel a a b. Najväčší spoločný deliteľ čísel a a b je rovný najväčšiemu spoločnému deliteľovi čísel $\frac{a}{15}$ a b a súčasne dvojnásobku najväčšieho spoločného deliteľa čísel a a $\frac{b}{4}$. Určte čísla a a b.*

(*Eva Semerádová*)

Riešenie. Prvočísla menšie ako 10 sú 2, 3, 5 a 7. Zo zadania vyplýva, že číslo a je deliteľné 15 a číslo b je deliteľné 4. Prvočíselné rozklady týchto čísel sú preto tvaru

$$a = 3 \cdot 5 \cdot p, \qquad b = 2 \cdot 2 \cdot q,$$

pričom p a q sú prvočísla z vyššie uvedeného zoznamu.

Keďže najväčší spoločný deliteľ čísel a a b je rovný dvojnásobku najväčšieho spoločného deliteľa čísel a a $\frac{b}{4}$, musí byť $p = 2$ a $q \neq 2$. Teda

$$a = 3 \cdot 5 \cdot 2 = 30.$$

Keďže najväčší spoločný deliteľ čísel a a b je rovný najväčšiemu spoločnému deliteľovi čísel $\frac{a}{15}$ a b, nemôže byť q ani 3, ani 5. Z predchádzajúceho vieme, že q nemôže byť ani 2. Teda $q = 7$ a

$$b = 2 \cdot 2 \cdot 7 = 28.$$

Každé z uvedených prvočísel je prítomné v rozklade aspoň jedného z čísel a a b. Neznáme čísla sú $a = 30$ a $b = 28$.

Návrh hodnotenia. 1 bod za deliteľnosť čísla a pätnástimi; 1 bod za deliteľnosť čísla b štyrmi; 3 body za diskusiu možností pre p a q; 1 bod za určenie vyhovujúcej možnosti a vyjadrenie a a b.

---

3. *Na tajomnom ostrove žijú dva druhy domorodcov: jedni hovoria výlučne pravdu (poctivci), druhí stále klamú (klamári). Výskumníci tam stretli niekoľko skupín domorodcov a vždy sa každého zo skupiny spýtali, koľko je v ich skupine poctivcov.*

- *Ako odpovede od jednej štvorčlennej skupiny dostali všetky čísla rovnaké.*
- *Ako odpovede od druhej skupiny dostali čísla 0, 1, 3, 3, 3, 4.*

Koľko poctivcov mohlo byť v jednej a koľko v druhej skupine? Určte všetky možnosti.

(*Marta Volfová*)

Riešenie. Keby v prvej skupine boli samí poctivci, dostali by výskumníci ako odpoveď čísla 4, 4, 4, 4. Keby v skupine boli traja, dvaja, resp. jeden poctivec, nemohli by výskumníci dostať ako odpoveď štyri rovnaké čísla. Keby v skupine boli len klamári, mohli by výskumníci ako odpoveď dostať akúkoľvek štvoricu čísel neobsahujúcu 0. V prvej skupine preto mohli byť buď štyria poctivci, alebo žiadny.

Keďže všetci poctivci v skupine musia (na rozdiel od klamárov) zodpovedať rovnako, číslo k môže predstavovať odpoveď poctivca len vtedy, keď sa opakuje k-krát. Preto počet poctivcov v druhej skupine mohol byť buď jedna, alebo tri. (Keby v skupine boli samí klamári, tak by odpoveď 0 bola pravdivá, čo u klamárov nie je možné.)

Návrh hodnotenia. Po 2 bodoch za určenie možností pre každú skupinu; 2 body za úplnosť a kvalitu komentára.

---

4. *V kosoštvorci $ABCD$ so stranou dĺžky 4 cm a uhlopriečkou AC dĺžky 4 cm je bod K stredom strany BC. Ďalej sú zostrojené body L a M, ktoré tvoria spolu s bodmi D a K štvorec $KLMD$. Vypočítajte obsah štvorca $KLMD$.* (Lucie Růžičková)

Riešenie. Podľa zadania je kosoštvorec $ABCD$ tvorený dvoma zhodnými rovnostrannými trojuholníkmi ACD a ABC. Bod K je stredom strany BC, úsečka AK je výškou v trojuholníku ABC a osou uhla CAB. Vnútorné uhly v rovnostranných trojuholníkoch majú veľkosť 60°, preto je veľkosť uhla CAK rovná 30° a veľkosť uhla DAK je $60° + 30° = 90°$. Trojuholník DAK je teda pravouhlý, pričom jeho prepona je stranou hľadaného štvorca.

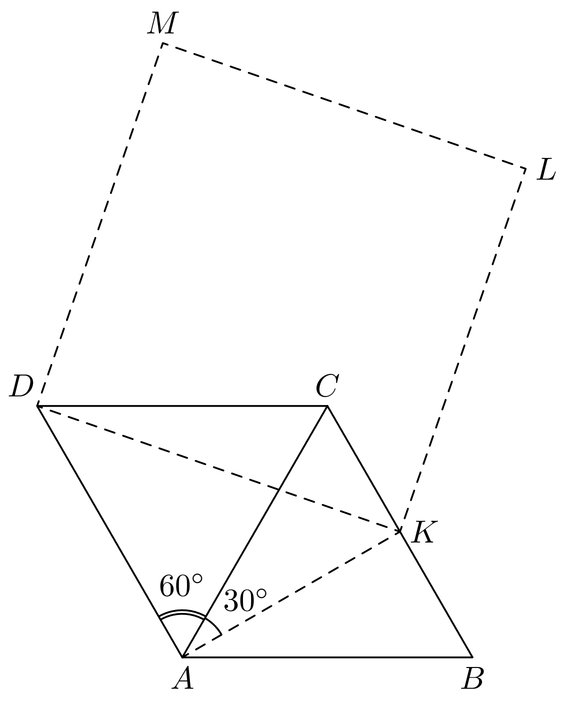
Strana DA má veľkosť 4 cm. Strana AK je odvesnou pravouhlého trojuholníka AKC, ktorého zvyšné strany merajú 4 cm a 2 cm. Podľa Pytagorovej vety platí

$$|AK|^2 = |AC|^2 - |CK|^2 = 4^2 - 2^2 = 12\,(\mathrm{cm}^2).$$

Teraz podľa Pytagorovej vety v trojuholníku DAK dostávame

$$|DK|^2 = |DA|^2 + |AK|^2 = 4^2 + 12 = 28\,(\mathrm{cm}^2).$$

Obsah štvorca $KLMD$ je 28 cm^2.



Návrh hodnotenia. 2 body za určenie pravého uhla DAK; 2 body za určenie $|AK|^2$; 2 body za určenie $|DK|^2$.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, Patrik Bak, Karol Gajdoš, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník
Recenzenti:	Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný, Patrik Bak
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018