2001/2002
51. ročník MO *Riešenia úloh školského kola kategórie A*

1. *V obore celých čísel x riešte rovnicu*

$$3(x^2)_5 + (3x)_5 = (3x-2)(x+2),$$

kde n_5 znamená násobok piatich najbližší číslu n, napr. $(-3)_5 = -5$. (J. Šimša)

Riešenie. Podľa zvyšku po delení čísla x číslom 5 môžeme rozlíšiť päť prípadov: (i) $x = 5k$, (ii) $x = 5k+1$, (iii) $x = 5k+2$, (iv) $x = 5k+3$ a (v) $x = 5k+4$ (k je ľubovoľné celé číslo). Pretože ale ľavá strana rovnice je zrejme násobkom piatich pre každé celé x, musí byť násobkom piatich aspoň jeden z činiteľov $3x-2$, $x+2$ pravej strany. Číslo $3x-2$ je deliteľné piatimi iba pre $x = 5k+4$, číslo $x+2$ iba pre $x = 5k+3$. Preto stačí rozobrať prípady (iv) a (v) (L označuje ľavú a P pravú stranu danej rovnice).

(iv) Pre $x = 5k+3$ platí $x^2 = 25k^2+30k+9$, $(x^2)_5 = 25k^2+30k+10$, $3x = 15k+9$, $(3x)_5 = 15k+10$, $L = 75k^2+105k+40$ a $P = 75k^2+110k+35$, takže z $L = P$ vychádza $k = 1$, čomu odpovedá $x = 5+3 = 8$.

(v) Pre $x = 5k+4$ platí $x^2 = 25k^2+40k+16$, $(x^2)_5 = 25k^2+40k+15$, $3x = 15k+12$, $(3x)_5 = 15k+10$, $L = 75k^2+135k+55$ a $P = 75k^2+140k+60$, takže z $L = P$ vychádza $k = -1$, čomu odpovedá $x = -5+4 = -1$.

Odpoveď. Daná rovnica má práve dve celočíselné riešenia, a to $x = -1$ a $x = 8$.

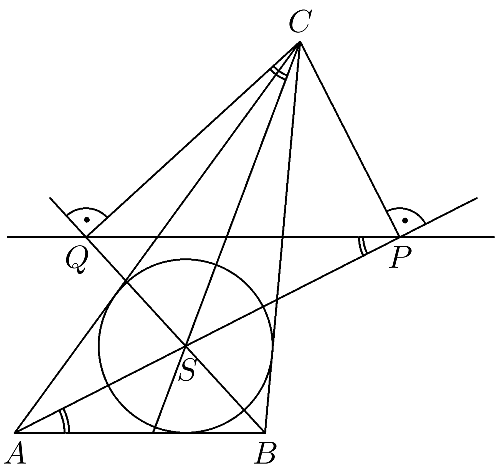
---

2. *Označme S stred kružnice vpísanej danému trojuholníku ABC a P, Q päty kolmíc z vrcholu C k priamkam, na ktorých ležia osi vnútorných uhlov BAC a ABC. Dokážte, že priamky AB a PQ sú rovnobežné.* (J. Švrček)

Riešenie. Označme ako obyčajne α, β, γ vnútorné uhly trojuholníka ABC. Pretože platí (obr. 1)

$$|\angle ASC| = 180^\circ - |\angle SAC| - |\angle SCA| = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\beta}{2},$$

je uhol ASC tupý, takže bod P leží na polpriamke opačnej k polpriamke SA. Podobne zdôvodníme, že bod Q leží na polpriamke opačnej k polpriamke SB. Priamky AB a PQ sú rovnobežné práve vtedy, keď striedavé uhly BAP a APQ sú zhodné. Vzhľadom na



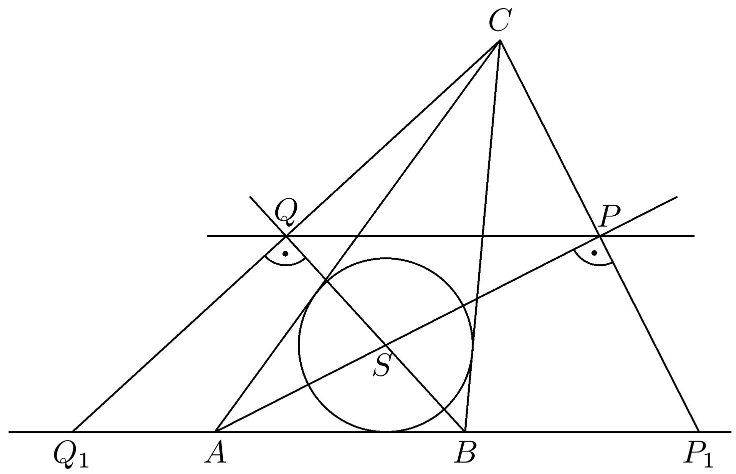
Obr. 1

to, že $|\measuredangle BAP| = \alpha/2$ a $|\measuredangle APQ| = |\measuredangle SPQ|$, stačí ukázať, že $|\measuredangle SPQ| = \alpha/2$. Pretože body P a Q ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom CS, je uhol SPQ zhodný s uhlom SCQ (obvodové uhly nad tetivou SQ spomenutej kružnice). Veľkosť uhla SCQ ľahko vyjadríme z trojuholníkov BCS a BCQ.

$$|\measuredangle SCQ| = |\measuredangle BCQ| - |\measuredangle BCS| = \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2},$$

čo sme potrebovali ukázať.

Iné riešenie. Označme P_1, Q_1 zodpovedajúce priesečníky polpriamok CP a CQ s priamkou AB (obr. 2, poradie bodov A, S, P a bodov B, S, Q na oboch osiach bolo vysvetlené v prvom riešení). Výška AP trojuholníka P_1CA leží na osi AS jeho vnútorného uhla P_1AC, takže ide o rovnoramenný trojuholník, ktorý má základňu P_1C so stredom P. Podobne pomocou rovnoramenného trojuholníka Q_1CB zdôvodníme, že bod Q je stredom úsečky Q_1C. Úsečka PQ je teda strednou priečkou trojuholníka P_1Q_1C, takže je rovnobežná s priamkou AB.



Obr. 2

---

3. *Zistite, pre ktoré reálne čísla p má sústava rovníc*

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= (p+1)x + py - z, \\ y^2 + 1 &= (p+1)y + pz - x, \\ z^2 + 1 &= (p+1)z + px - y \end{aligned}$$

s neznámymi x, y, z práve jedno riešenie v obore reálnych čísiel. (E. Kováč)

Riešenie. Všimnime si, že rovnice danej sústavy sa medzi sebou líšia len cyklickou zámenou neznámych x, y a z. Ak je teda riešením sústavy trojica čísel $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$, sú riešením aj trojice $(x, y, z) = (y_0, z_0, x_0)$ a $(x, y, z) = (z_0, x_0, y_0)$. Ak je riešenie sústavy (pri pevnom p) jediné, musia byť uvedené trojice zhodné, musí teda platiť $x_0 = y_0 = z_0$. Trojica (x_0, x_0, x_0) je zrejme riešením danej sústavy práve vtedy, keď je číslo $x = x_0$ riešením rovnice $x^2 + 1 = 2px$. Pre každé hľadané p preto musí mať ostatná rovnica jediné riešenie, takže jej diskriminant $D = 4p^2 - 4$ musí byť nulový. Odtiaľ máme nutne $p = \pm 1$.

Teraz ukážeme, že pre $p = 1$ je $x = y = z = 1$ skutočne jediné riešenie pôvodnej sústavy troch rovníc a že to isté platí aj v prípade $p = -1$ o jej riešení $x = y = z = = -1$. Keď porovnáme súčet ľavých strán so súčtom pravých strán sústavy, zistíme, že jej ľubovoľné riešenie (x, y, z) spĺňa aj rovnicu

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3 = 2p(x + y + z),$$

z ktorej úpravou dostaneme

$$(x - p)^2 + (y - p)^2 + (z - p)^2 = 3(p^2 - 1). \tag{1}$$

Pre obe hodnoty $p = \pm 1$ však platí $p^2 - 1 = 0$, takže vtedy sa súčet nezáporných čísel $(x - p)^2$, $(y - p)^2$ a $(z - p)^2$ rovná nule. To je možné len vtedy, keď $x = y = z = p$.

Odpoveď. Hľadané hodnoty p sú dve, $p = 1$ a $p = -1$.

Iné riešenie. Rovnako ako v prvom riešení získame sčítaním troch daných rovníc rovnicu (1). Z nej vyplýva tento záver: Ak má sústava pri danom p aspoň jedno riešenie (x, y, z) v obore reálnych čísel, tak platí nerovnosť $p^2 \geqq 1$, čiže $|p| \geqq 1$. Ak ale $|p| > 1$, môžeme ľahko vypísať dve rôzne riešenia skúmanej sústavy, totiž trojice (x_1, x_1, x_1) a (x_2, x_2, x_2), kde $x_{1,2}$ sú korene rovnice $x^2 + 1 = 2px$ (ktorej diskriminant je vďaka predpokladu $|p| > 1$ kladný). Preto nám zostáva posúdiť iba hodnoty $p = \pm 1$, pre ktoré však z rovnice (1) okamžite vyplýva, že ak má pôvodná sústava vôbec nejaké riešenie, je ním trojica $(x, y, z) = (p, p, p)$. Triviálna skúška dosadením ukazuje, že je to naozaj riešenie (pre $p = 1$ aj pre $p = -1$).