**2001/2002**
**51. ročník MO** *Riešenia úloh krajského kola kategórie A*

---

**1.** *Dokážte, že pre ľubovoľné čísla $\alpha, \beta \in \langle 0, \pi/2)$ platí nerovnosť*

$$\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta} \geqq 2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}.$$

*Zistite, kedy nastane rovnosť.* (E. Kováč)

**Riešenie.** Pretože pre ľubovoľné $\alpha, \beta \in \langle 0, \pi/2\rangle$ platí

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \leqq \frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}, \tag{1}$$

stačí namiesto nerovnosti zo zadania úlohy dokázať nerovnosť

$$\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}}. \tag{2}$$

To je ale jednoduché, lebo po prevedení odmocniny z pravej strany na ľavú dostaneme po úprave „na štvorec“ zrejmú nerovnosť

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\cos\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\cos\beta}}\right)^2 \geqq 0. \tag{2'}$$

Tým je celý dôkaz hotový. Dodajme, že nerovnosť (2) tiež vyplýva z nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom (kladných) čísel $1/\cos\alpha$ a $1/\cos\beta$.

Rovnosť v dokázanej nerovnosti nastane práve vtedy, keď nastanú rovnosti v oboch nerovnostiach (1) a (2′). To možno zrejme vyjadriť podmienkami

$$\sin(\alpha+\beta) = 1 \qquad \text{a} \qquad \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\beta},$$

ktoré sú pre nejaké $\alpha, \beta \in \langle 0, \pi/2)$ splnené práve vtedy, keď $\alpha + \beta = \pi/2$ a $\alpha = \beta$, čiže $\alpha = \beta = \pi/4$.

---

**2.** *Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel $x$ a $y$, pre ktoré platí*

$$x^2 = 4y + 3 \cdot n(x, y),$$

*kde $n(x, y)$ značí najmenší spoločný násobok čísel $x$ a $y$.* (P. Černek)

**Riešenie.** Pretože číslo $x$ je deliteľom oboch čísel $n(x, y)$ a $x^2$, vyplýva z danej rovnice, že číslo $x$ delí aj číslo $4y$. Číslo $4y$ je teda spoločný násobok čísel $x$ a $y$, takže ich najmenší spoločný násobok $n(x, y)$ je deliteľom čísla $4y$ (a zároveň násobkom čísla $y$). Číslo $n(x, y)$ je teda rovné jednému z čísel $y$, $2y$ alebo $4y$. Tieto tri prípady, ktoré sa pre prirodzené $y$ navzájom vylučujú, teraz posúdime oddelene.

(i) $n(x,y) = y$. Platí $y = kx$ pre vhodné prirodzené $k$. Dosadením do rovnice dostaneme $x^2 = 4kx + 3kx$, odkiaľ $x = 7k$, a preto $y = 7k^2$. Pretože $n(7k, 7k^2) = 7k^2$ pre každé $k$, je zodpovedajúca dvojica $(x,y) = (7k, 7k^2)$ skutočne riešenie.

(ii) $n(x,y) = 2y$. Platí $2y = kx$ pre vhodné nepárne $k$ (pre $k$ párne dostaneme, že $x$ delí $y$, čo je prípad (i)). Dosadením do rovnice dostaneme $x^2 = 2kx + 3kx$, odkiaľ $x = 5k$, a preto $2y = 5k^2$. To je spor s tým, že $k$ je nepárne.

(iii) $n(x,y) = 4y$. Platí $4y = kx$ pre vhodné nepárne $k$ (pre $k$ párne dostaneme, že $x$ delí $y$ alebo $2y$, čo vedie na prípad (i) alebo (ii)). Dosadením do rovnice dostaneme $x^2 = kx + 3kx$, odkiaľ $x = 4k$, a preto $y = k^2$. Pretože $n(4k, k^2) = 4k^2$ pre každé nepárne $k$, je zodpovedajúca dvojica $(x,y) = (4k, k^2)$ skutočne riešenie.

*Odpoveď.* Hľadaných dvojíc $(x,y)$ je nekonečne veľa; sú to jednak dvojice $(7k, 7k^2)$, kde $k$ je ľubovoľné prirodzené číslo, jednak dvojice $(4k, k^2)$, kde $k$ je ľubovoľné nepárne prirodzené číslo.

**Iné riešenie.** Označme $d$ najväčší spoločný deliteľ hľadaných čísel $x$ a $y$. Potom $x = dx_1$ a $y = dy_1$, kde $x_1$ a $y_1$ sú nesúdeliteľné prirodzené čísla, a $n(x,y) = dx_1y_1$. Po dosadení do danej rovnice dostaneme $d^2x_1^2 = 4dy_1 + 3dx_1y_1$, čo po krátení číslom $d$ prepíšeme do tvaru

$$x_1(dx_1 - 3y_1) = 4y_1. \tag{1}$$

Prirodzené číslo $4y_1$ je teda násobkom čísla $x_1$. Čísla $x_1$ a $y_1$ sú ale nesúdeliteľné, teda číslo $x_1$ je deliteľom čísla 4, a preto $x_1 \in \{1, 2, 4\}$.

Ak $x_1 = 1$, tak z (1) vychádza $d = 7y_1$, takže $x = dx_1 = 7y_1$ a $y = dy_1 = 7y_1^2$. Dvojica čísel $x = 7k$ a $y = 7k^2$ je riešením pôvodnej rovnice pre každé $k$.

Ak $x_1 = 2$, tak podľa (1) platí $2d = 5y_1$, takže číslo $y_1$ je párne rovnako ako číslo $x_1$, čo odporuje ich predpokladanej nesúdeliteľnosti.

Ak $x_1 = 4$, tak z (1) vychádza $d = y_1$, takže $x = dx_1 = 4d$ a $y = dy_1 = d^2$. Čísla $x_1 = 4$ a $y_1 = d$ sú však nesúdeliteľné iba vtedy, keď je $d$ nepárne číslo. Pre každé také $d$ je dvojica $x = 4d$ a $y = d^2$ riešením pôvodnej rovnice.

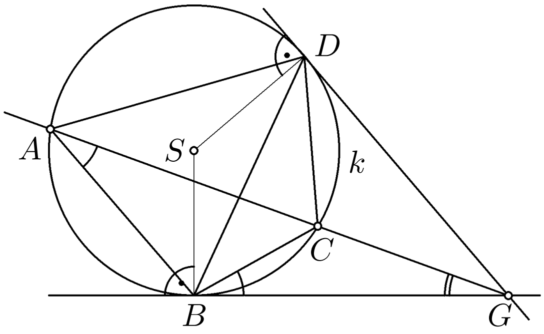
---

**3.** *Do kružnice $k$ je vpísaný štvoruholník $ABCD$, ktorého uhlopriečka $BD$ nie je priemerom. Dokážte, že priesečník priamok, ktoré sa kružnice $k$ dotýkajú v bodoch $B$ a $D$, leží na priamke $AC$ práve vtedy, keď platí $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$.* (*E. Kováč*)

**Riešenie.** Pretože úsečka $BD$ nie je priemerom kružnice $k$, jej dotyčnice v bodoch $B$ a $D$ nie sú rovnobežné, takže sa pretínajú v bode, ktorý označíme $G$.

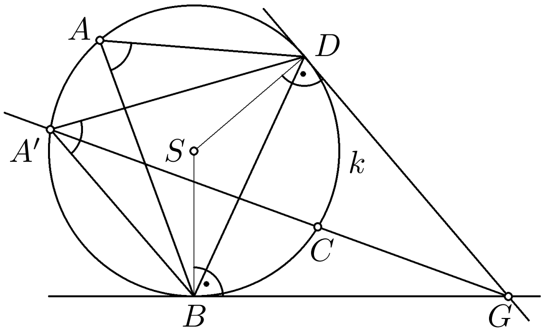
(i) Predpokladajme, že bod $G$ leží na priamke $AC$, napríklad na polpriamke opačnej k $CA$ (obr. 1). (Ak leží bod $G$ na polpriamke opačnej k $AC$, vymeníme označenie vrcholov $A$ a $C$, ktoré nič nemení na rovnosti, ktorú máme dokázať.) Trojuholníky $ABG$ a $BCG$ sa zhodujú ako vo vnútorných uhloch pri spoločnom vrchole $G$, tak vo vnútorných uhloch $BAG$ a $CBG$ (podľa vety o obvodovom a úsekovom uhle pre tetivu $BC$ kružnice $k$). Preto sú tieto trojuholníky podobné, teda platí $|AB| : |BC| = |GB| : |GC|$. Analogický pomer $|AD| : |CD| = |GD| : |GC|$ vyplýva z podobných trojuholníkov $ADG$ a $DCG$. Keď porovnáme oba pomery a prihliadneme na rovnosť $|GB| = |GD|$ (úseky dotyčníc z bodu $G$ ku kružnici $k$), zistíme, že platí $|AB| : |BC| =$

$= |AD| : |CD|$, odkiaľ už vyplýva rovnosť $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$.




Obr. 1

(ii) Predpokladajme teraz, že platí rovnosť $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$ a že bod $G$ leží v rovnakej polrovine s hraničnou priamkou $BD$ ako bod $C$ (inak opäť vymeníme označenie bodov $A$ a $C$, ktoré priamka $BD$ oddeľuje.) Potom polpriamka $GC$ pretína kružnicu $k$ v dvoch bodoch, v bode $C$ a v bode, ktorý označíme $A'$ (obr. 2). Pre štvoruholník $A'BCD$ môžeme použiť tvrdenie dokázané v časti (*i*), dostaneme tak rovnosť




Obr. 2

$|A'B| \cdot |CD| = |A'D| \cdot |BC|$. Porovnaním s rovnosťou $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$ zistíme, že platí $|A'B| : |AB| = |A'D| : |AD|$. Tento pomer spolu so zhodnosťou uhlov $BA'D$ a $BAD$ (obvodové uhly nad tetivou $BD$ kružnice $k$) znamená, že trojuholníky $BA'D$ a $BAD$ sú podobné podľa vety *sus*. Pretože však strane $BD$ zodpovedá strana $BD$, ide o zhodné trojuholníky (ležiace v rovnakej polrovine s hraničnou priamkou $BD$), teda body $A$ a $A'$ sú totožné. Bod $G$ preto leží na priamke $AC$.

---

**4.** *V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc*

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= p(y+z), \\ y^2 - 1 &= p(z+x), \\ z^2 - 1 &= p(x+y) \end{aligned}$$

*s neznámymi $x$, $y$, $z$ a parametrom $p$. Vykonajte diskusiu počtu riešení.* (E. Kováč)

**Riešenie.** Odčítaním prvých dvoch rovníc sústavy dostaneme

$$x^2 - y^2 = p(y-x), \quad \text{čiže} \quad (x-y)(x+y+p) = 0.$$

Odtiaľ vyplýva, že aspoň jeden z činiteľov $(x-y)$ a $(x+y+p)$ je rovný nule, takže číslo $y$ je rovné $x$ alebo $-p-x$. Podobne odčítaním prvej a tretej rovnice sústavy zistíme, že $z \in \{x, -p-x\}$. Spolu to znamená, že každé riešenie $(x, y, z)$ danej sústavy je (až na poradie) trojica tvaru $(u, u, u)$ alebo $(u, u, -p-u)$.

(i) Trojica $(u, u, u)$ je riešením práve vtedy, keď číslo $u$ spĺňa rovnicu $u^2 - 1 = 2pu$. Jej úpravou dostaneme $(u-p)^2 = p^2 + 1$, odkiaľ vidno, že pre každé reálne $p$ existujú dve rôzne čísla $u$ a sú rovné $p \pm \sqrt{p^2+1}$. Im zodpovedajú prvé dve riešenia pôvodnej sústavy

$$x_1 = y_1 = z_1 = p + \sqrt{p^2+1} \quad \text{a} \quad x_2 = y_2 = z_2 = p - \sqrt{p^2+1}. \tag{1}$$

(ii) Hľadajme teraz všetky riešenia sústavy tvaru $(u, u, -p-u)$. Ľahko si uvedomíme, že trojica čísel $(u, u, -p-u)$ (v akomkoľvek poradí) je riešením pôvodnej sústavy práve vtedy, keď číslo $u$ súčasne vyhovuje dvom rovniciam

$$u^2 - 1 = p(u - p - u) \quad \text{a} \quad (-p-u)^2 - 1 = p(u+u).$$

Je zrejmé, že každá z týchto rovníc je ekvivalentná s rovnicou $u^2 = 1 - p^2$. Vidíme, že v prípade $|p| > 1$ číslo $u$ neexistuje, v prípade $|p| = 1$ platí $u = 0$ a v prípade $|p| < 1$ existujú dve čísla $u$ a sú rovné $\pm\sqrt{1-p^2}$. Zodpovedajúce riešenia pôvodnej sústavy sú dve trojice čísel

$$\begin{aligned} x_3 = y_3 &= \sqrt{1-p^2} \quad \text{a} \quad z_3 = -p - \sqrt{1-p^2}, \\ x_4 = y_4 &= -\sqrt{1-p^2} \quad \text{a} \quad z_4 = -p + \sqrt{1-p^2}, \end{aligned} \tag{2}$$

a ďalej všetky ich permutácie

$$\begin{aligned} (x_5, y_5, z_5) &= (x_3, z_3, x_3), \quad (x_6, y_6, z_6) = (x_4, z_4, x_4), \\ (x_7, y_7, z_7) &= (z_3, x_3, x_3), \quad (x_8, y_8, z_8) = (z_4, x_4, x_4). \end{aligned} \tag{3}$$

(Vzťahy (2) a (3) môžeme použiť aj v prípade $|p| = 1$, musíme však mať na pamäti, že poskytujú len tri rôzne riešenia, lebo tretie riešenie je totožné so štvrtým, piate so šiestym a siedme s ôsmym.)

Teraz ešte posúdime, kedy sú niektoré riešenia uvedené v (2) a (3) totožné s riešeniami uvedenými v (1). Taká situácia nastane, pokiaľ platí $|p| \leqq 1$ a je splnená niektorá z rovníc

$$\sqrt{1-p^2} = -p - \sqrt{1-p^2} \quad \text{resp.} \quad -\sqrt{1-p^2} = -p + \sqrt{1-p^2}.$$

Jednoduchým výpočtom zistíme, že prvá rovnica má jediné riešenie $p = -2/\sqrt{5}$ (pre také $p$ tretie, piate a siedme riešenie sú totožné s prvým riešením) a že druhá rovnica má jediné riešenie $p = 2/\sqrt{5}$ (pre také $p$ štvrté, šieste a ôsme riešenie sú totožné s druhým riešením).

*Odpoveď.* Všetky riešenia $(x_i, y_i, z_i)$ danej sústavy rovníc sú popísané vzorcami (1), (2) a (3). Ak $|p| > 1$, existujú práve dve rôzne riešenia (s indexami $i = 1, 2$). Ak $|p| < 1$ a $|p| \neq 2/\sqrt{5}$, existuje práve osem rôznych riešení (s indexami $i = 1, 2, \ldots, 8$). Ak $|p| = 1$ alebo $|p| = 2/\sqrt{5}$, existuje práve päť rôznych riešení (s indexami $i = 1, 2, 3, 5, 7$ pre hodnoty $p = 1$, $p = -1$, $p = 2/\sqrt{5}$ a s indexami $i = 1, 2, 4, 6, 8$ pre $p = -2/\sqrt{5}$).