2001/2002
51. ročník MO *Riešenia úloh celoštátneho kola kategórie A*

---

1. *V obore celých čísel riešte sústavu rovníc*

$$(4x)_5 + 7y = 14,$$
$$(2y)_5 - (3x)_7 = 74,$$

kde $(n)_k$ značí násobok čísla k najbližší k číslu n. (*P. Černek*)

Riešenie. Z prvej rovnice danej sústavy vyplýva, že číslo $7y-14 = 7(y-2)$ je deliteľné piatimi, takže $y = 5s + 2$ pre vhodné celé s. Potom platí $2y = 10s + 4$, a preto $(2y)_5 = 10s + 5$. Po dosadení do sústavy dostaneme dvojicu rovníc $(4x)_5 + 35s = 0$ a $10s - (3x)_7 = 69$. Keď odčítame od dvojnásobku prvej rovnice sedemnásobok druhej rovnice, vylúčime neznámu s a pre neznámu x dostaneme rovnicu $2(4x)_5 + 7(3x)_7 = -483$. Pretože funkcia $F(t) = 2(4t)_5+7(3t)_7$ je v celočíselnej premennej t neklesajúca a platí $F(-18) = -532$, $F(-17) = -483$ a $F(-16) = -473$, má naša rovnica $F(x) = -483$ jediné riešenie $x = -17$. Z rovnice $(4x)_5+35s = 0$ potom vyplýva $s = 2$, takže $y = 12$. Skúšku pre dvojicu $(x, y) = (-17, 12)$ urobíme ľahko dosadením.

Daná sústava má jediné riešenie $(x, y) = (-17, 12)$.

Iné riešenie. Pre každé celé číslo t zrejme platia nerovnosti $t - 2 \leqq (t)_5 \leqq t + 2$ a $t - 3 \leqq (t)_7 \leqq t + 3$. Podľa nich dostaneme z danej sústavy rovníc sústavu nerovníc

$$12 \leqq 4x + 7y \leqq 16,$$
$$69 \leqq 2y - 3x \leqq 79.$$

Z tejto sústavy vylúčime napríklad neznámu x. Pre výraz $3(4x+7y)+4(2y-3x)$, ktorý sa rovná $29y$, tak dostaneme odhady

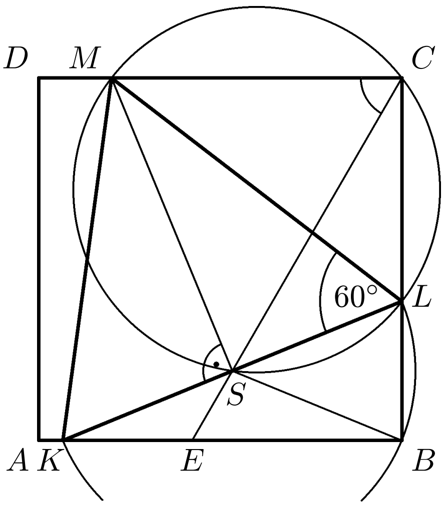
$$29y \leqq 3 \cdot 16 + 4 \cdot 79 = 364 \quad \text{a} \quad 29y \geqq 3 \cdot 12 + 4 \cdot 69 = 312.$$

Z nerovností $312 \leqq 29y \leqq 364$ však vyplýva $y \in \{11, 12\}$. Z prvej rovnice pôvodnej sústavy pre $y = 11$ vychádza $(4x)_5 = -63$, čo nie je násobok piatich, zatiaľ čo pre $y = 12$ vychádza $(4x)_5 = -70$, odkiaľ $-72 \leqq 4x \leqq -68$, takže $x \in \{-18, -17\}$. Nutne teda platí $y = 12$; po dosadení do druhej rovnice sústavy zistíme, že táto rovnica je splnená pre $x = -17$, nie však pre $x = -18$. Jediným riešením je teda dvojica $(x, y) = (-17, 12)$.

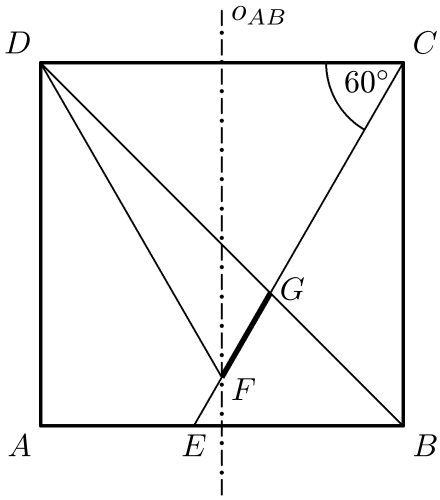
---

2. *Uvažujme ľubovoľný rovnostranný trojuholník KLM, ktorého vrcholy K, L a M ležia postupne na stranách AB, BC a CD daného štvorca $ABCD$. Nájdite množinu stredov strán všetkých takých trojuholníkov KLM.* (*J. Zhouf*)

Riešenie. Označme S stred strany KL ľubovoľného z uvažovaných trojuholníkov KLM (obr. 1). Pretože oba uhly LCM a LSM sú pravé, je štvoruholník $CMSL$ tetivový, a preto $|\measuredangle MCS| = |\measuredangle MLS| = 60°$. Bod S teda leží na pevnej úsečke CE, ktorej krajný bod $E \in AB$ je daný rovnosťou $|\measuredangle ECD| = 60°$. Ukážeme, že hľadanou množinou



Obr. 1



Obr. 2

všetkých stredov S je istá úsečka medzi bodmi C a E, ktorá je určená podmienkami $S \in CE$,

$$\text{(i)} \quad |AS| \geqq |BS| \qquad \text{a} \qquad \text{(ii)} \quad |\measuredangle CBS| \geqq 45°.$$

Z týchto podmienok zrejme vyplýva, že sa jedná o úsečku FG, kde F je vrchol rovnostranného trojuholníka CDF a G je ten bod strany CF, ktorý leží na uhlopriečke BD, obr. 2. Z bodov úsečky CE totiž podmienku (i) spĺňajú práve body úsečky CF, podmienku (ii) práve body úsečky EG.

Spomenuté tvrdenie dokážeme tak, že vnútri úsečky CE zvolíme ľubovoľný bod S a pokúsime sa rekonštruovať vyhovujúci trojuholník KLM, ktorého strana KL má stred vo zvolenom bode S. Zistíme, že taký trojuholník KLM existuje práve vtedy, keď bod S spĺňa obe podmienky (i) a (ii). Vráťme sa znova k obr. 1. Pretože uhol KBL je pravý, sú podľa Tálesovej vety všetky tri úsečky SK, SB a SL zhodné. Preto možno body K, L určiť ako priesečníky úsečiek AB, BC s kružnicou so stredom S a polomerom $|SB|$. Taký priesečník K ($K \neq B$) existuje práve vtedy, keď platí podmienka (i), priesečník L ($L \neq B$) existuje práve vtedy, keď platí nerovnosť $|BS| \leqq |CS|$, čiže $|\measuredangle BCS| \leqq |\measuredangle CBS|$. Pretože však $|\measuredangle BCS| = 30°$, je posledná nerovnosť zaručená silnejšou podmienkou (ii), ktorej nutnosť sa ukáže za chvíľu. Ak už poznáme body K a L, môžeme určiť bod M ako priesečník strany CD s osou úsečky KL. Predpokladajme, že taký priesečník M existuje; zostrojený rovnoramenný trojuholník KLM je potom naozaj rovnostranný, lebo štvoruholník $CMSL$ je tetivový (uhly pri vrcholoch C a S sú pravé), a preto platí $|\measuredangle MLS| = |\measuredangle MCS| = 60°$. Zostáva preto posúdiť, kedy existuje priesečník úsečky CD s osou úsečky KL, teda kedy body C, D ležia v opačných polrovinách určených spomenutou osou, ktoré sú popísané nerovnicami $|KX| \leqq |LX|$ a $|KX| \geqq$ $\geqq |LX|$. Pretože platí $|KC| \geqq |BC|$ a $|BC| \geqq |LC|$, teda $|KC| \geqq |LC|$, je našou úlohou zistiť, kedy je splnená nerovnosť $|KD| \leqq |LD|$. Z pravouhlých trojuholníkov KDA a LDC usúdime, že posledná nerovnosť platí práve vtedy, keď $|AK| \leqq |LC|$, čiže $|KB| \geqq |LB|$, čiže $|\measuredangle BLK| \geqq 45°$. Uhol BLK je ale zhodný s uhlom CBS (vieme totiž, že $|SB| = |SL|$), a tak dostávame podmienku (ii). Dôkaz je hotový.

3. *Dokážte, že prirodzené číslo A je druhou mocninou niektorého prirodzeného čísla práve vtedy, keď pre každé prirodzené n je aspoň jeden z rozdielov*

$$(A+1)^2 - A,\ (A+2)^2 - A,\ (A+3)^2 - A,\ \dots,\ (A+n)^2 - A$$

deliteľný číslom n. (P. Kaňovský)

Riešenie. (i) Predpokladajme najskôr, že $A = d^2$ pre niektoré prirodzené d. Potom pre každé $j = 1, 2, \dots, n$ platí

$$(A+j)^2 - A = (d^2+j)^2 - d^2 = (d^2 - d + j)(d^2 + d + j);$$

pretože jedno z n po sebe idúcich čísel $(d^2 - d + j)$, kde $j = 1, 2, \dots, n$, je deliteľné číslom n, je číslom n deliteľné aj príslušné číslo $(A+j)^2 - A$.

(ii) Predpokladajme teraz, že číslo A nie je druhou mocninou žiadneho prirodzeného čísla. V rozklade čísla A na prvočísla sa potom niektoré prvočíslo p vyskytuje v nepárnym exponentom, teda $p^{2k-1} \mid A$ a $p^{2k} \nmid A$ pre vhodné prirodzené k. Ukážme, že napríklad číslo $n = p^{2k}$ nemá vlastnosť z textu úlohy. Pripusťme naopak, že pre niektoré $j = 1, 2, \dots, p^{2k}$ je rozdiel $(A+j)^2 - A$ deliteľný číslom p^{2k}. Čísla $(A+j)^2$ a A potom dávajú rovnaké zvyšky pri delení číslom p^{2k}, a teda aj pri delení číslom p^{2k-1}. Pretože číslo A je deliteľné číslom p^{2k-1}, nie však číslom p^{2k}, platí to isté aj o čísle $(A + j)^2$. To je ale spor, lebo $(A+j)^2$ je druhá mocnina prirodzeného čísla.

4. *Nájdite všetky dvojice reálnych čísel a, b, pre ktoré má rovnica*

$$\frac{ax^2 - 24x + b}{x^2 - 1} = x$$

v obore reálnych čísel práve dve riešenia, pričom ich súčet je 12. (P. Černek)

Riešenie. Po vynásobení oboch strán rovnice výrazom $x^2 - 1$ (ktorý je rovný nule práve vtedy, keď $x \in \{-1, 1\}$) a po prevedení všetkých členov na jednu stranu dostaneme kubickú rovnicu

$$x^3 - ax^2 + 23x - b = 0. \tag{1}$$

Ako dobre vieme, každá kubická rovnica s reálnymi koeficientmi má v obore reálnych čísel buď jeden, alebo tri korene (ak ich počítame aj s ich násobnosťou). Pretože obe riešenia pôvodnej rovnice sú korene rovnice (1), musí mať táto rovnica tri reálne korene. Pre tieto čísla x_1, x_2, x_3 a pre koeficienty rovnice (1) platia známe Viètove vzťahy

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= 23, \\ x_1x_2x_3 &= b. \end{aligned} \tag{2}$$

Aby sme sa ďalej vyhli niektorým skúškam, pripomeňme známy fakt, že každé riešenie sústavy rovníc (2) je tvorené trojicou koreňov rovnice (1), všetky riešenia (2) sú teda permutácie tej istej trojice čísel.

Predpoklad o dvoch riešeniach pôvodnej rovnice znamená, že buď práve jeden z koreňov x_1, x_2, x_3 patrí do množiny $\{-1, 1\}$ a ostatné dva korene sú rôzne, alebo je jeden z koreňov x_1, x_2, x_3 dvojnásobný a žiadny z nich do množiny $\{-1, 1\}$ nepatrí. Riešenie pôvodnej rovnice možno preto označiť s a $12 - s$ tak, že nastane jedna z nasledujúcich možností: $(x_1, x_2, x_3) = (-1, s, 12 - s)$, $(x_1, x_2, x_3) = (1, s, 12 - s)$, alebo $(x_1, x_2, x_3) = (s, s, 12 - s)$; vždy pritom platí $s \notin \{-1, 1, 6, 11, 13\}$. Vymenované možnosti teraz jednotlivo posúdime.

(i) $(x_1, x_2, x_3) = (-1, s, 12 - s)$. Sústava (2) má po dosadení a úprave tvar

$$a = 11, \quad s^2 - 12s - 35 = 0, \quad b = -s(12 - s).$$

Druhá rovnica má dva korene $s = 5$ a $s = 7$, ktorým podľa tretej rovnice zodpovedá rovnaká hodnota $b = -35$. Dvojica $(a, b) = (11, -35)$ je riešením úlohy.

(ii) $(x_1, x_2, x_3) = (1, s, 12 - s)$. Sústava (2) má po dosadení a úprave tvar

$$a = 13, \quad s^2 - 12s + 11 = 0, \quad b = s(12 - s).$$

Druhá rovnica má korene $s = 1$ a $s = 11$, ktoré však patria k neprípustným hodnotám s (ako sme ukázali vyššie).

(iii) $(x_1, x_2, x_3) = (s, s, 12 - s)$. Sústava (2) má po dosadení a úprave tvar

$$a = s + 12, \quad s^2 - 24s + 23 = 0, \quad b = s^2(12 - s).$$

Druhá rovnica má korene $s = 1$ a $s = 23$. Hodnota $s = 1$ je neprípustná, hodnote $s = 23$ podľa prvej a tretej rovnice zodpovedajú hodnoty $a = 35$ a $b = -11 \cdot 23^2 = -5\,819$. Dvojica $(a, b) = (35, -5\,819)$ je riešením úlohy.

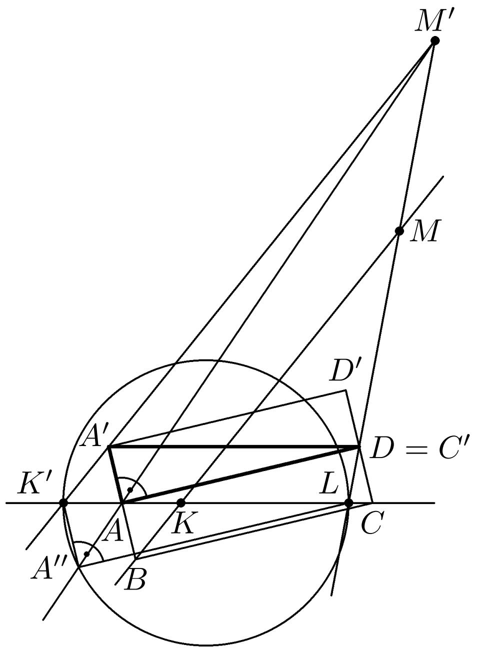
Hľadané dvojice (a, b) sú dvojice $(11, -35)$ a $(35, -5\,819)$.

---

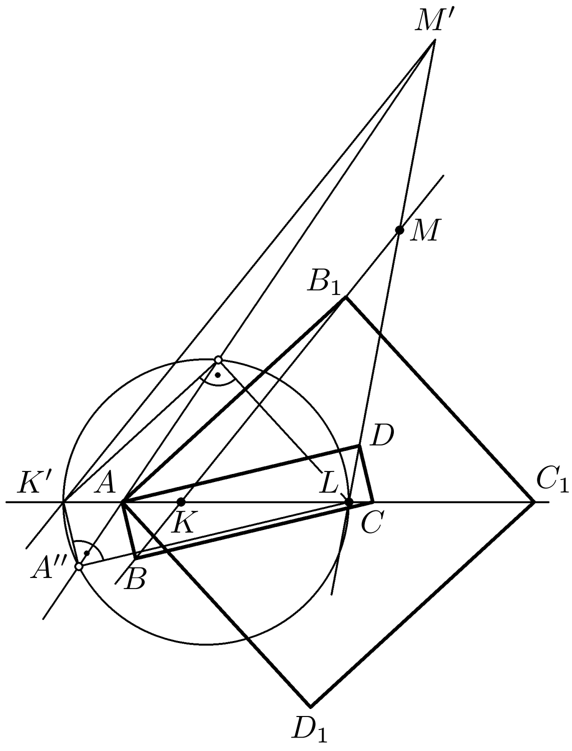
5. *V rovine je daný trojuholník KLM a bod A ležiaci na polpriamke opačnej k polpriamke KL. Zostrojte pravouholník $ABCD$, ktorého vrcholy B, C a D ležia postupne na priamkach KM, KL a LM.* *(P. Calábek)*

Riešenie. Predpokladajme, že $ABCD$ je hľadaný pravouholník, a označme $A'B'C'D'$ jeho obraz v posunutí o vektor $\overrightarrow{BA}$ (obr. 3, $B' = A$). Bod A' leží na priamke súmerne združenej s priamkou KM podľa stredu A – zodpovedajúce priesečníky tejto priamky s priamkami LK a LM označme K' a M'. Pretože uhlopriečka AC hľadaného pravouholníka leží na priamke KL, je uhlopriečka $A'C'$ posunutého obdĺžnika $A'B'C'D'$ s KL rovnobežná. V rovnoľahlosti so stredom M', ktorá zobrazuje bod A' do bodu K' (a bod $C' = D$ do bodu L), zodpovedá pravouhlému trojuholníku $A'AC'$ trojuholník $K'A''L$. Bod A'' už dokážeme zostrojiť, pretože leží na Tálesovej kružnici nad priemerom $K'L$ a na priamke $M'A$. Teraz už ľahko zostrojíme hľadaný pravouholník $ABCD$. Najskôr určíme body A' a $C' = D$, ktoré sú obrazmi bodov K' a L v rovnoľahlosti so stredom M', ktorá zobrazuje bod A'' do bodu A a k nim doplníme vrcholy B a C ako obrazy bodov $B' = A$, $C' = D$ v posunutí o vektor $\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{AB}$.

Pretože bod A leží vnútri úsečky $K'L$ a $M' \neq A$, pretína priamka $M'A$ Tálesovu kružnicu nad priemerom $K'L$ vždy v dvoch bodoch. Ak je A'' jeden z priesečníkov uvedenej Tálesovej kružnice s priamkou $M'A$ a $M' \neq A''$, určujú body A, A'' hľadanú rovnoľahlosť so stredom M'. Pokiaľ teda bod M'' neleží na kružnici s priemerom $K'L$, má úloha dve rôzne riešenia $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ (obr. 4). V opačnom prípade má úloha iba jedno riešenie.



Obr. 3



Obr. 4

---

6. *Nech $\mathbb{R}^+$ je množina všetkých kladných reálnych čísel. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ spĺňajúce pre ľubovoľné $x, y \in \mathbb{R}^+$ rovnosť*

$$f\bigl(xf(y)\bigr) = f(xy) + x.$$

(*P. Kaňovský*)

Riešenie. Keď dosadíme do danej rovnice za x hodnotu $f(x)$, dostaneme rovnicu

$$f\bigl(f(x)f(y)\bigr) = f\bigl(f(x)y\bigr) + f(x),$$

z ktorej vyjadríme $f\bigl(f(x)y\bigr) = f\bigl(f(x)f(y)\bigr) - f(x)$. Iné vyjadrenie rovnakého výrazu $f\bigl(f(x)y\bigr)$ dostaneme, keď v pôvodnej rovnici vymeníme navzájom hodnoty x a y; vyjde nám $f\bigl(f(x)y\bigr) = f(yx) + y$. Porovnaním oboch vyjadrení tak dostaneme rovnicu

$$f\bigl(f(x)f(y)\bigr) = f(yx) + y + f(x),$$

ktorej ľavá strana sa nezmení, keď vymeníme navzájom hodnoty x a y. Rovnakú vlastnosť musí preto mať aj pravá strana tejto rovnice, takže musí platiť

$$f(yx) + y + f(x) = f(xy) + x + f(y), \quad \text{čiže} \quad y + f(x) = x + f(y).$$

Ďalšou zrejmou úpravou dostávame rovnicu $f(x) - x = f(y) - y$, ktorá musí byť splnená pre ľubovoľné $x, y \in \mathbb{R}^+$. Znamená to, že funkcia $x \mapsto f(x) - x$ je na množine $\mathbb{R}^+$

konštantná, teda hľadaná funkcia f musí mať tvar $f(x) = x + c$ pre vhodné číslo c. Po dosadení tohto predpisu do oboch strán pôvodnej rovnice máme

$$\begin{gathered} f\bigl(xf(y)\bigr) = xf(y) + c = x(y + c) + c = xy + cx + c, \\ f(xy) + x = (xy + c) + x = xy + x + c. \end{gathered}$$

Zisťujeme, že vyhovuje jedine $c = 1$. Hľadaná funkcia f je teda jediná a je určená vzťahom $f(x) = x + 1$.