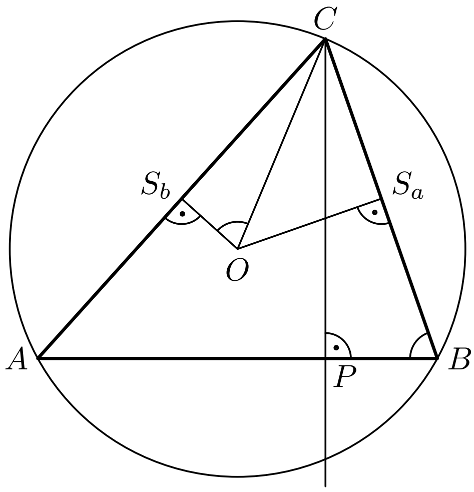
67. ročník Matematickej olympiády
2017/2018 *Riešenia úloh krajského kola kategórie B*

---

1. *V ostrouhlom trojuholníku ABC označme O stred kružnice opísanej, S_a, S_b postupne stredy strán BC, AC a P pätu výšky na stranu AB. Vyjadrite podiel $|OS_a|/|OS_b|$ pomocou $a = |BC|$, $b = |CA|$ a $k = |AP|/|BP|$.* (Šárka Gergelitsová)

Riešenie. Trojuholníky S_bOC a PBC sú podobné, lebo sú oba pravouhlé a veľkosť obvodového uhla PBC prislúchajúceho tetive AC je rovná polovici veľkosti stredového uhla AOC prislúchajúceho tej istej tetive (obr. 1).



Obr. 1

Z rovnakého dôvodu sú podobné aj trojuholníky S_aOC a PAC. Platí preto

$$\frac{|OS_a|}{|OC|} = \frac{|AP|}{|AC|} = \frac{|AP|}{b}, \qquad \frac{|OS_b|}{|OC|} = \frac{|BP|}{|BC|} = \frac{|BP|}{a},$$

odkiaľ

$$\frac{|OS_a|}{|OS_b|} = \frac{|AP| \cdot |OC|}{b} \cdot \frac{a}{|BP| \cdot |OC|} = \frac{|AP|}{|BP|} \cdot \frac{a}{b}. = k \cdot \frac{a}{b}.$$

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, pritom každý z nasledujúcich krokov oceňte jedným bodom: 1. jedna podobnosť (s dôkazom), 2. druhá podobnosť (s dôkazom), 3. správny pomer v prvej podobnosti, 4. správny pomer v druhej podobnosti, 5. spojenie do rovnosti (eliminácia $|OC|$), 6. správny záver (vyjadrenie pomocou a, b, k).

---

2. *Nájdite všetky kladné reálne čísla t také, že pre ľubovoľné nezáporné reálne číslo x platí nerovnosť*

$$\frac{t}{x+2} + \frac{x}{t(x+1)} \leqq 1.$$

(*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Vďaka podmienkam $x \geqq 0$ a $t > 0$ môžeme danú nerovnosť ekvivalentne upraviť na kvadratickú nerovnosť vzhľadom na x:

$$\begin{aligned}
\frac{t}{x+2} + \frac{x}{t(x+1)} &\leqq 1,\\
t^2(x+1) + x(x+2) &\leqq t(x+1)(x+2),\\
x^2 + (t^2+2)x + t^2 &\leqq tx^2 + 3tx + 2t,\\
0 &\leqq (t-1)x^2 + (3t - t^2 - 2)x + 2t - t^2,\\
0 &\leqq (t-1)x^2 + (2-t)(t-1)x + t(2-t). \qquad (1)
\end{aligned}$$

Dosadením $x = 0$ dostaneme $t(2-t) \geqq 0$, a tak pre hľadané $t > 0$ nutne $t \leqq 2$.

Ak má nerovnosť (1) platiť pre všetky nezáporné čísla x, nemôže byť koeficient pri x^2 záporný, inak by sme pre dostatočne veľké nezáporné x určite získali na pravej strane (1) zápornú hodnotu. Musí preto byť $t - 1 \geqq 0$, čiže $t \geqq 1$.

Naopak pre ľubovoľné $t \in \langle 1, 2\rangle$ budú zrejme koeficienty všetkých troch členov kvadratického trojčlena (v premennej x) na pravej strane nerovnosti (1) nezáporné, takže daná nerovnosť bude platiť pre ľubovoľné nezáporné reálne číslo x.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov.

Za dôkaz, že $t \geqq 1$, dajte 2 body (možno nahliadnuť napríklad sporom: pre $t < 1$ po úprave na $x^2 \leqq (t-2)x + t(t-2)/(1-t)$ je vidno, že parabola nemôže ležať pod žiadnou priamkou).

2 body za dôkaz, že $t \leqq 2$. To možno dokázať opäť sporom aj tak, že za predpokladu $t > 2$ upravíme na $x^2 \geqq (t-2)x + t(t-2)/(t-1)$, takže graf priamky, ktorú predstavuje výraz na pravej strane, pretína os y v kladnom bode, čo odporuje polohe vrcholu paraboly $y = x^2$.

2 body za dôkaz, že nerovnici naozaj vyhovuje interval $\langle 1, 2\rangle$ a formuláciu záveru.

1 bod strhnite, ak je vynechaná zmienka o ekvivalentných úpravách, pokiaľ je nutná.

Len za overenie, že tvrdenie funguje pre konečne veľa t z intervalu $\langle 1, 2\rangle$, žiadne body nedávajte.

---

3. *Pre ktoré n je možné vyplniť tabuľku $n \times n$ číslami od 1 po n^2 tak, aby súčet čísel v každom riadku aj v každom stĺpci bol deliteľný siedmimi?* (*Ján Mazák*)

Riešenie. Súčet všetkých čísel v tabuľke je $\frac{1}{2}n^2(n^2+1)$. Ak má byť tento súčet deliteľný siedmimi, musí byť siedmimi deliteľné buď samo n, alebo číslo $n^2 + 1$. Ako sa však ľahko presvedčíme, číslo $n^2 + 1$ nie je násobkom siedmich pre žiadne prirodzené n. (To samozrejme stačí overiť len pre n rovné všetkým možným zvyškom $0, 1, \ldots, 6$ po delení siedmimi.)

Ak je naopak n násobok siedmich, možno tabuľku naozaj vyplniť tak, aby požiadavky úlohy boli splnené. Stačí do nej vpísať čísla od 1 do n^2 postupne podľa veľkosti po jednotlivých riadkoch. V i-tom riadku ($1 \leqq i \leqq n$) tak budú čísla

$$7(i-1)+1,\ 7(i-1)+2,\ \ldots,\ 7(i-1)+n,$$

ktorých súčet je deliteľný siedmimi, pretože súčet $1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ je zrejme násobkom siedmich.

Podobne v j-tom stĺpci ($1 \leqq j \leqq n$) budú čísla

$$j,\ n+j,\ \ldots,\ (n-1)n+j,$$

ktorých súčet je $nj + n(1 + 2 + \ldots + n - 1)$, čo je násobok čísla n, a teda aj siedmich.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za nájdenie nutnej podmienky $7 \mid n$ dajte 3 body, za overenie, že pre tieto n možno tabuľku vyplniť, dajte 3 body. Podrobnejšie: 1 bod za pozorovanie, že súčet čísel tabuľky musí byť deliteľný 7, 1 bod za výpočet tohto súčtu ako $\frac{1}{2}n^2(n^2+1)$, 1 bod za korektný dôkaz, že $7 \mid n$, 1 bod za opis vyhovujúceho vyplnenia, 1 bod za dôkaz, že riadky majú súčet deliteľný 7, 1 bod za dôkaz, že stĺpce majú súčet deliteľný 7.

A čiastočné body: 1 bod dajte za hypotézu, že odpoveďou je $7 \mid n$. Za dôkaz, že pre konečne veľa n sa to spraviť nedá, ani za nájdenie vyplnenia pre $n = 7$ (a nič viac) žiadne body nedávajte.

---

4. *Nanajvýš koľko čísel možno vybrať z množiny $M = \{1, 2, \dots, 2\,018\}$ tak, aby rozdiel žiadnych dvoch vybraných čísel nebol rovný prvočíslu?* (Josef Tkadlec)

Riešenie. Výber 505 čísel $1, 5, 9, 13, 17, \dots, 2\,017 \in M$, ktoré dávajú po delení štyrmi zvyšok 1, má zrejme požadovanú vlastnosť, lebo rozdiel každých dvoch vybraných čísel je násobkom štyroch, teda číslo zložené. (Keďže 4 je najmenšie zložené číslo, nie je možný podobne pravidelný výber s väčším počtom čísel.)

Ukážeme, že viac čísel s požadovanou vlastnosťou z danej množiny vybrať nemožno, nech už postupujeme akokoľvek. Na to najskôr overíme kľúčové tvrdenie, že totiž z každej osmice po sebe idúcich čísel možno vybrať nanajvýš dve čísla.

Dokážeme najskôr, že ak vyberieme nejaké číslo n, zo siedmich nasledujúcich čísel $n+1, n+2, \dots, n+7$ možno vybrať nanajvýš jedno. Naozaj, potom už sa nedá vybrať žiadne z čísel $n+2$, $n+3$, $n+5$, $n+7$. A zo zvyšnej trojice $n+1$, $n+4$, $n+6$ možno vybrať iba jedno číslo, lebo ich rozdiely sú prvočísla 2, 3 a 5. Tým je tvrdenie o sedmici čísel, ktoré nasledujú za ktorýmkoľvek vybraným číslom n, dokázané. Z neho je už zrejmé, že *žiadna* osmica po sebe idúcich čísel nemôže obsahovať viac ako dve vybrané čísla, ako sme sľúbili overiť.

Danú množinu M môžeme rozdeliť na množinu $\{1, 2, \dots, 10\}$ a 251 nasledujúcich osmíc. Pritom z množiny $\{1, 2, \dots, 10\}$ možno vybrať nanajvýš tri vyhovujúce čísla. Keby sme z prvej desiatky

$$\{1, 2, \dots, 10\} = \{1, 2\} \cup \{3, 4, \dots, 10\} = \{1, 2, \dots, 8\} \cup \{9, 10\}$$

vybrali vyhovujúcim spôsobom štyri čísla, podľa dokázanej vlastnosti každej osmice po sebe idúcich čísel by sme museli vybrať ako obe čísla 1 a 2, tak obe čísla 9 a 10, avšak $9 - 2$ je prvočíslo. Z množiny M tak možno vybrať nanajvýš $2 \cdot 251 + 3 = 505$ čísel.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. 1 bod za myšlienku, že z osmice po sebe idúcich čísel sa dajú vybrať nanajvýš dve a 1 bod za korektný dôkaz tejto myšlienky. 1 bod za rozdelenie čísel správnym spôsobom na disjunktné osmice a „zvyšok“. 1 bod za správne odvodenie, že z takéhoto rozdelenia vyplýva, že môžeme vybrať nanajvýš 505 čísel. 1 bod za konštrukciu samotnej vyhovujúcej množiny a 1 bod za zdôvodnenie, že zostrojená množina úlohe vyhovuje.

V prípade čiastočného riešenia dajte 1 bod za konštrukciu príkladu 505 čísel, ktorá vyhovujú a ešte bod navyše za dôkaz, že k nim nemožno pridať žiadne ďalšie číslo.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Stanislav Krajči, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný, Patrik Bak

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018