67. ročník Matematickej olympiády
2017/2018 *Riešenia úloh krajského kola kategórie C*

---

1. *Nájdite najmenšie prirodzené číslo končiace štvorčíslím 2018, ktoré je násobkom čísla 2017.* (*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Využijeme to, že každý súčin čísla 7 s jednociferným číslom končí inou cifrou. Postupne budeme odzadu dopĺňať cifry hľadaného činiteľa (k danému činiteľu 2 017) tak, aby sme vo výsledku dostali číslo končiace štvorčíslím 2 018.

V prvom kroku hľadáme cifru, ktorej 7-násobok končí cifrou 8:

$$\begin{array}{ccccc}
 & 2 & 0 & 1 & 7 \\
\times & \ast & \ast & \ast & ? \\
\hline
\cdots & \ast & \ast & \ast & \ast \\
\cdots & \ast & \ast & \ast & \\
\cdots & \ast & \ast & & \\
\hline
\cdots & 2 & 0 & 1 & 8
\end{array}$$

Cifrou 8 končí jediný zo súčinov čísla 7 s ciframi 0 až 9, a to číslo $28 = 4 \cdot 7$. Na mieste otáznika preto musí byť cifra 4. Doplníme ju a v prvom riadku pod čiarou tak bude $4 \cdot 2\,017 = 8\,068$, čo naozaj končí cifrou 8. Vo výslednom súčine potrebujeme mať cifru 1 na mieste desiatok; tú spolu s cifrou 6 na mieste desiatok v čísle 8 068 dostaneme iba tak, že k nej pričítame cifru 5 – tentoraz teda hľadáme taký násobok čísla 2 017, ktorý končí cifrou 5:

$$\begin{array}{ccccc}
 & 2 & 0 & 1 & 7 \\
\times & \ast & \ast & ? & 4 \\
\hline
 & 8 & 0 & 6 & 8 \\
\cdots & \ast & \ast & 5 & \\
\cdots & \ast & \ast & & \\
\cdots & \ast & & & \\
\hline
\cdots & 2 & 0 & 1 & 8
\end{array}$$

Tomu vyhovuje iba násobok $5 \cdot 7 = 35$. Podobným postupom doplníme aj zvyšné dve cifry – na mieste stoviek preto bude cifra 3 a na mieste tisícok cifra 4:

$$\begin{array}{ccccc}
 & 2 & 0 & 1 & 7 \\
\times & \ast & ? & 5 & 4 \\
\hline
 & 8 & 0 & 6 & 8 \\
\cdots & 0 & 8 & 5 & \\
\cdots & \ast & 1 & & \\
\cdots & \ast & & & \\
\hline
\cdots & 2 & 0 & 1 & 8
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & 2 & 0 & 1 & 7 \\
\times & ? & 3 & 5 & 4 \\
\hline
 & 8 & 0 & 6 & 8 \\
\cdots & 0 & 8 & 5 & \\
\cdots & 5 & 1 & & \\
\cdots & 8 & & & \\
\hline
\cdots & 2 & 0 & 1 & 8
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & 2 & 0 & 1 & 7 \\
\times & 4 & 3 & 5 & 4 \\
\hline
 & 8 & 0 & 6 & 8 \\
\cdots & 0 & 8 & 5 & \\
\cdots & 5 & 1 & & \\
\cdots & 8 & & & \\
\hline
\cdots & 2 & 0 & 1 & 8
\end{array}$$

Každé číslo, ktoré po vynásobení číslom 2 017 končí štvorčíslím 2 018, musí teda končiť štvorčíslím 4 354, a tak najmenší vyhovujúci násobok je $2\,017 \cdot 4\,354 = 8\,782\,018$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za správnu voľbu postupu zisťovania cifier sprava dajte 1 bod. Každú cifru správneho riešenia odmeňte 1 bodom a zdôvodnenie, že nájdené číslo je najmenšie, odmeňte posledným bodom. Ak je postup správny, ale nájdené číslo nie je správne, dajte nanajvýš 4 body.

2. *Pre celé čísla x, y, z platí $x^2+y-z=10$, $x^2-y+z=22$. Nájdite najmenšiu možnú hodnotu výrazu $x^2+y^2+z^2$.* (Ján Mazák)

Riešenie. Sčítaním daných rovností dostaneme

$$(x^2+y-z)+(x^2-y+z)=2x^2=10+22=32,$$

preto $x^2=16$, čiže $x=\pm 4$. Keď tento výsledok dosadíme späť do prvej či druhej z daných rovností, vyjde v oboch prípadoch $z=y+6$.

Dosaďme teraz obe získané rovnosti do výrazu, ktorý máme minimalizovať:

$$x^2+y^2+z^2=16+y^2+(y+6)^2=2y^2+12y+52=2(y^2+6y+26)=2\big((y+3)^2+17\big).$$

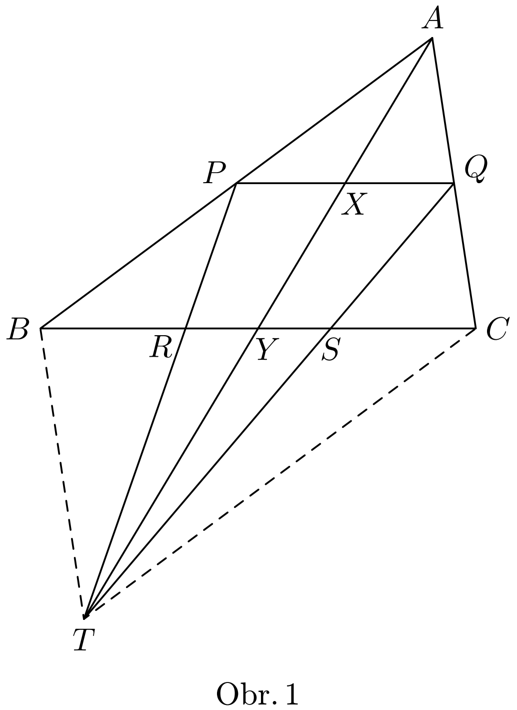
Keďže $(y+3)^2\geqq 0$, je najmenšia možná hodnota daného výrazu rovná $2\cdot 17=34$. Túto hodnotu upravený výraz dosahuje pre $y=-3$, z čoho vychádza $z=y+6=3$, nájdené čísla x, y a z sú teda celé, ako vyžaduje zadanie.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za odvodenie oboch vzťahov $x^2=16$ a $z=y+6$ dajte po 1 bode, 1 bod za prepis výrazu v zadaní na výraz s jednou neznámou, 2 body za jeho úpravu na výraz s druhou mocninou a 1 bod za nájdenie minima 34. Ak však chýba konštatovanie, že hodnotu 34 výraz skutočne nadobúda, strhnite 1 bod.

3. *Daný je trojuholník ABC. Nech P, Q sú postupne stredy strán AB, AC a nech R, S sú vnútorné body úsečky BC, pre ktoré $|BR|=|RS|=|SC|$. Označme T priesečník priamok PR a QS. Dokážte, že $ABTC$ je rovnobežník.* (Patrik Bak)

Riešenie. Dokážeme, že uhlopriečky štvoruholníka $ABTC$ sa navzájom rozpoľujú, čo bude znamenať, že $ABTC$ je naozaj rovnobežník.

Označme X stred úsečky PQ a Y stred úsečky RS (obr. 1). Z rovnosti $|BR|=|SC|$ vyplýva, že bod Y je zároveň stredom úsečky BC. Keďže ako je známe $PQ\parallel BC$, sú trojuholníky APQ a ABC podobné podľa vety *uu*, takže ich „polovice“ APX a ABY sú



Obr. 1

podobné podľa vety *sus*, teda bod X leží vnútri úsečky AY. Analogicky z rovnobežnosti $PQ \parallel RS$ vyplýva podobnosť trojuholníkov TRS a TPQ (*uu*), takže sú podobné aj trojuholníky TRY a TPX (*sus*), a bod Y tak leží vnútri úsečky TX (lebo $|RS| < |PQ|$). Spolu dostávame, že bod Y leží na úsečke AT. Ostáva dokázať, že Y je nielen stredom úsečky BC, ale aj stredom úsečky AT.

Keďže úsečka PQ je strednou priečkou trojuholníka ABC, je $|PQ| = \frac{1}{2}|BC|$, čiže $|PX| = \frac{1}{2}|BY|$, takže z prvej podobnosti $APX \sim ABY$ máme

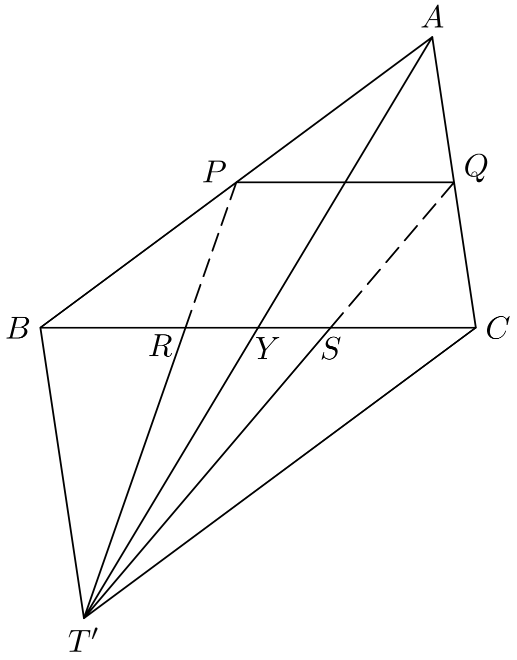
$$|AX| = \frac{1}{2}|AY|, \quad \text{čiže} \quad |AY| = 2|XY|. \tag{1}$$

Keďže $|RS| = \frac{1}{3}|BC| = \frac{1}{3} \cdot 2|PQ|$, je $|RY| = \frac{2}{3}|PX|$, a preto z druhej podobnosti $TRY \sim TPX$ vychádza

$$|TY| = \frac{2}{3}|TX| = \frac{2}{3}(|TY| + |XY|), \quad \text{čiže} \quad |TY| = 2|XY|.$$

To spolu s druhou rovnosťou v (1) dáva $|TY| = |AY|$. Tým je dôkaz ukončený.

Iné riešenie. Doplňme trojuholník ABC na rovnobežník $ABT'C$. Jeho uhlopriečka AT' potom prechádza stredom Y úsečky BC (obr. 2), a zo zadania teda



Obr. 2

vyplýva, že $|RY| = \frac{1}{2}|RS| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}|BC| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{3}|BY|$, čiže $|BR| : |RY| = 2 : 1$. Bod R tak leží na ťažnici BY trojuholníka ABT' a delí ju v pomere $2 : 1$, preto je ťažiskom. Priamka $T'R$ je teda ťažnicou trojuholníka ABT', a prechádza preto stredom P strany AB. Podobne dostaneme, že priamka $T'S$ prechádza bodom Q, a tak je bod T' priesečníkom priamok PR a QS, čiže $T' = T$, čo sme chceli dokázať.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za dôkaz, že úsečka AT rozpoľuje úsečku BC, dajte celkom 3 body, z toho po jednom bode za obe podobnosti a tretí bod za dôkaz kolineárnosti bodov A, Y a T. Ďalšie 2 body dajte za vyjadrenie pomeru $|TY| : |TX| = 2 : 3$ a za odvodenie rovnosti $|TY| = |AY|$.

A posledný bod za tvrdenie, že štvoruholník $ABTC$ je rovnobežník, pretože sa jeho uhlopriečky rozpoľujú.

Ak riešiteľ postupuje ako v druhom riešení, oceňte 2 bodmi doplnenie na rovnobežník $ABT'C$. Tri body dajte za tvrdenie, že bod R (resp. S) je ťažiskom trojuholníka ABT' (resp. ACT'), pričom 2 body dajte za odvodenie pomeru $|BR| : |RY| = 2 : 1$ (resp. $|SC| : |SY| = 2 : 1$). Posledný bod dajte za zistenie, že bod T' leží rovnako ako bod T v priesečníku priamok PR a QS.

Ak riešiteľ postupuje inak ako v uvedených riešeniach, hodnoťte jednotlivé zistenia v súlade s uvedenými schémami.

---

4. *Určte najmenšie prirodzené číslo n, pre ktoré platí: Keď vyplníme štvorcovú tabuľku $n \times n$ ľubovoľnými navzájom rôznymi prirodzenými číslami, vždy sa nájde políčko s číslom, ktoré po delení tromi dáva rovnaký zvyšok ako iné číslo z toho istého riadka aj ako iné číslo z toho istého stĺpca.* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Pre čísla $n = 1, 2, 3$ nie je ťažké uviesť príklad tabuliek, v ktorých želané políčko neexistuje. Keďže nás zaujímajú iba zvyšky čísel po delení tromi, zostavíme najskôr prislúchajúce tabuľky tak, aby sme v každom riadku aj stĺpci mali rôzne zvyšky, a potom uvedené zvyšky nahradíme rôznymi číslami s tým istým zvyškom (tabuľka pre $n = 1$ môže obsahovať ľubovoľné prirodzené číslo):

$$\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline\end{array}\qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline 1&2\\\hline\end{array}\qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&1&2\\\hline 2&0&1\\\hline 1&2&0\\\hline\end{array}\qquad\longrightarrow\qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline 4&5\\\hline\end{array}\qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&1&2\\\hline 5&6&4\\\hline 7&8&9\\\hline\end{array}$$

Teraz ukážeme, že pre $n = 4$ už dané tvrdenie platí. Čísla v ľubovoľne vyplnenej tabuľke 4×4 nahradíme ich zvyškami 0, 1, 2 po delení tromi. Zvoľme ľubovoľný riadok r_1 vyplnenej tabuľky. Sú v ňom zapísané štyri zvyšky, takže aspoň jeden z nich – označme ho z_1 – sa v riadku opakuje, je teda zapísaný v dvoch rôznych stĺpcoch, ktoré označíme s_1 a s_2. Ak je v stĺpci s_1 zvyšok z_1 zapísaný dvakrát, sme s hľadaním požadovaného políčka hotoví (číslo v riadku r_1 a stĺpci s_1 má vo svojom riadku aj stĺpci ešte ďalšie číslo s rovnakým zvyškom z_1 po delení tromi).

V opačnom prípade je v stĺpci s_1 nejaký iný zvyšok – označme ho $z_2 \neq z_1$ – zapísaný aspoň dvakrát; prislúchajúce riadky označme r_2 a r_3:

$$\begin{array}{c|cc} & s_1 & s_2\\\hline r_1 & z_1 & z_1\\ r_2 & z_2 & ?\\ r_3 & z_2 & ?\end{array}$$

Ak je na niektorom z dvoch políčok uvažovanej tabuľky označených zatiaľ otáznikom zvyšok z_1, sme hotoví, keďže požadovanú vlastnosť má políčko v riadku r_1 a v stĺpci s_2. Podobne sme hotoví, ak je na mieste jedného z otáznikov zvyšok z_2, keďže v tom prípade vyhovuje políčko so zvyškom z_2 v tom istom riadku a stĺpci s_1. Ostáva ešte tá možnosť, že na miestach oboch otáznikov sú zapísané dva rovnaké zvyšky z_3 ($z_2 \neq z_3 \neq z_1$). Označme zvyšné stĺpce ako s_3 a s_4 (na ich skutočnom poradí v tabuľke samozrejme nezáleží):

$$\begin{array}{c|cccc} & s_1 & s_2 & s_3 & s_4\\\hline r_1 & z_1 & z_1 & & \\ r_2 & z_2 & z_3 & ? & ?\\ r_3 & z_2 & z_3 & ? & ?\end{array}$$

Ak je teraz na mieste jedného zo štyroch otáznikov zvyšok z_2, má požadovanú vlastnosť políčko v tom istom riadku a v stĺpci s_1. Podobne ak je na mieste jedného zo štyroch otáznikov zvyšok z_3, vyhovuje políčko v tom istom riadku a v stĺpci s_2. Napokon ak na mieste všetkých štyroch otáznikov sú napísané iba zvyšky z_1, tak každé z týchto štyroch políčok má požadovanú vlastnosť.

Práve sme ukázali, že v každej tabuľke 4×4 nájdeme vždy číslo, ktoré dáva rovnaký zvyšok po delení tromi ako iné číslo z toho istého riadka aj ako iné číslo z toho istého stĺpca. Hľadané najmenšie n je teda rovné štyrom.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Body rozdeľte zhruba nasledovne: 1 bod za tabuľku 3×3, 1 bod za ideu, že v každom riadku a stĺpci tabuľky 4×4 sa nejaký zvyšok opakuje, 1 bod za prepojenie riadkov a stĺpcov (zmysluplné použitie myšlienky), 1 bod za následné doplnenie zvyškov z_3 (dvojica otáznikov), 1 bod za doplnenie ďalších zvyškov (štvorica otáznikov), ktoré vedú k nájdeniu vhodného políčka, a 1 bod za správny záver, že najmenšie hľadané číslo je 4.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Stanislav Krajči, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný, Patrik Bak
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018