67. ročník Matematickej olympiády
2017/2018 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z6*

---

1. *Anička a Blanka si napísali každá jedno dvojciferné číslo, ktoré začínalo sedmičkou. Dievčatá si zvolili rôzne čísla. Potom každá medzi obe cifry vložila nulu, takže im vzniklo trojciferné číslo. Od neho každá odčítala svoje pôvodné dvojciferné číslo. Výsledok ich prekvapil. Určte, ako sa ich výsledky líšili.* (*Libuše Hozová*)

Nápad. Vyskúšajte opísaný postup s niekoľkými konkrétnymi číslami.

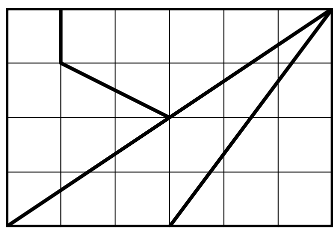
Riešenie. Dvojciferné číslo začínajúce sedmičkou je tvaru 7$*$, pričom namiesto hviezdičky môže byť ľubovoľná cifra. Vložením nuly dostávame trojciferné číslo tvaru 70$*$. Bez ohľadu na to, akú cifru zastupuje hviezdička na mieste jednotiek, rozdiel vychádza stále rovnako:

$$\begin{array}{rccc} & 7 & 0 & * \\ - & & 7 & * \\ \hline & 6 & 3 & 0 \end{array}$$

Výsledky Aničky a Blanky sa nijako nelíšili, obom vyšlo 630.

---

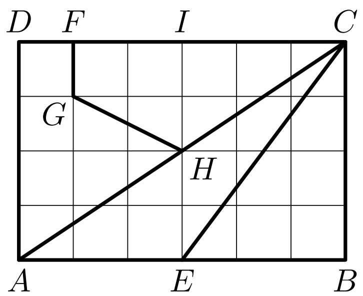
2. *Erika chcela ponúknuť čokoládu svojim trom kamarátkam. Keď ju vytiahla z batohu, zistila, že je polámaná ako na obrázku. (Vyznačené štvorčeky sú navzájom zhodné.) Dievčatá sa dohodli, že čokoládu ďalej lámať nebudú a lósom určia, aký veľký kúsok ktorá dostane. Zoraďte štyri kúsky čokolády od najmenšieho po najväčší.*



(*Katarína Jasenčáková*)

Nápad. Viete porovnať jednotlivé kúsky bez počítania?

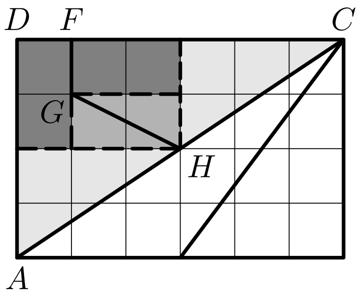
Riešenie. Najskôr označíme niekoľko pomocných vrcholov ako na obrázku:



Úsečka AC je uhlopriečkou obdĺžnika $ABCD$, a tá delí obdĺžnik na dve rovnaké časti. Jedna časť je tvorená trojuholníkmi AEC a EBC, druhá časť je tvorená mnohouholníkmi $AHGFD$ a $CFGH$.

Trojuholník ABC je polovicou obdĺžnika $ABCD$. Trojuholník EBC je polovicou obdĺžnika $EBCI$, a ten je polovicou obdĺžnika $ABCD$. Preto má trojuholník EBC polovičný obsah v porovnaní s trojuholníkom ABC a trojuholníky EBC a AEC tak majú rovnaký obsah.

Mnohouholníky $AHGFD$ a $CFGH$ možno rozdeliť na menšie časti, ktoré sú po dvojiciach zhodné, pozri prerušované čiary na nasledujúcom obrázku. Preto majú aj tieto dva mnohouholníky rovnaký obsah.

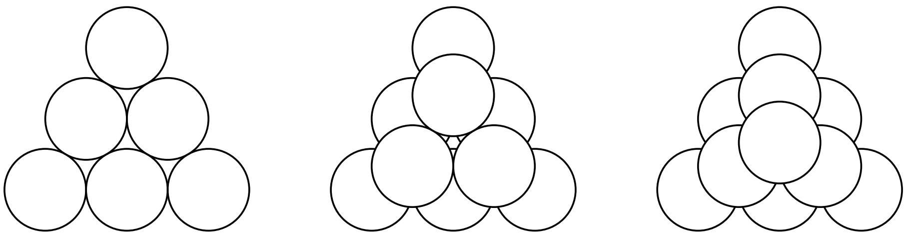


Všetky štyri mnohouholníky teda majú rovnaký obsah, čiže všetky štyri kúsky čokolády sú rovnako veľké.

Poznámka. Vyjadrenie obsahov jednotlivých kúskov pomocou vyznačených štvorčekov vyzerá takto: celý obdĺžnik má obsah $6 \times 4 = 24$ štvorčekov, každý z trojuholníkov AEC a EBC má obsah $\frac{1}{2}(3 \times 4) = 6$ štvorčekov, každý z mnohouholníkov $AHGFD$ a $CFGH$ má obsah $3 + 2 + 1 = 6$ štvorčekov (odvodené z predchádzajúceho delenia).

---

3. *Jano mal 100 rovnakých zaváracích fliaš, z ktorých si staval trojboké pyramídy. Najvyššie poschodie pyramídy má vždy jednu fľašu, druhé poschodie zhora predstavuje rovnostranný trojuholník, ktorého strana pozostáva z dvoch fliaš, atď. Príklad konštrukcie trojposchodovej pyramídy je na obrázku.*



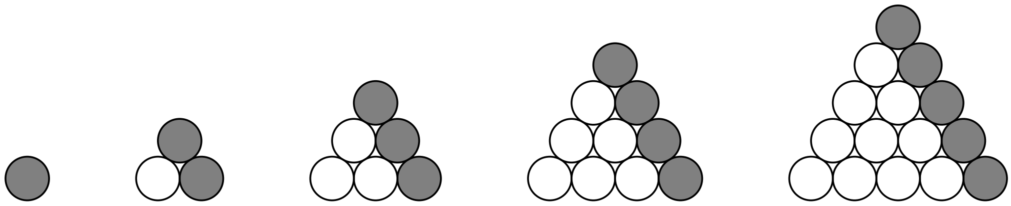
1. poschodie 1. a 2. poschodie trojposchodová pyramída

1. *Koľko fliaš Jano potreboval na päťposchodovú pyramídu?*
2. *Koľko poschodí mala pyramída, na ktorú bolo použitých čo najviac Janových fliaš?*

(*Katarína Jasenčáková*)

Nápad. Ako sa líšia počty fliaš v susedných poschodiach?

Riešenie. 1. Fľaše budeme počítať po poschodiach zhora. Zo zadania a návodných obrázkov vieme, že v piatom (najvyššom) poschodí je 1 fľaša, vo štvrtom poschodí sú 3 fľaše, v treťom poschodí je 6 fliaš. Každé ďalšie (nižšie) poschodie si možno predstaviť tak, že sa k predchádzajúcemu (vyššiemu) poschodiu pridá jeden rad fliaš:



Na päťposchodovú pyramídu Jano potreboval

$$1+\underbrace{1+2}_{3}+\underbrace{1+2+3}_{6}+\underbrace{1+2+3+4}_{10}+\underbrace{1+2+3+4+5}_{15}=35 \text{ fliaš.}$$

2. S rovnakým nápadom ako v predchádzajúcom odseku budeme pracovať ďalej, kým nevyčerpáme maximum zo sto použiteľných fliaš: na šesťposchodovú pyramídu treba

$$35+\underbrace{15+6}_{21}=56 \text{ fliaš,}$$

na sedemposchodovú pyramídu treba

$$56+\underbrace{21+7}_{28}=84 \text{ fliaš,}$$

na osemposchodovú pyramídu treba

$$84+\underbrace{28+8}_{36}=120 \text{ fliaš.}$$

So sto fľašami sa dá postaviť nanajvýš sedemposchodová pyramída.

---

4. *Veronika má klasickú šachovnicu s 8×8 políčkami. Riadky sú označené ciframi 1 až 8, stĺpce písmenami A až H. Veronika položila na políčko B1 jazdca, s ktorým možno pohybovať iba tak ako v šachu.*

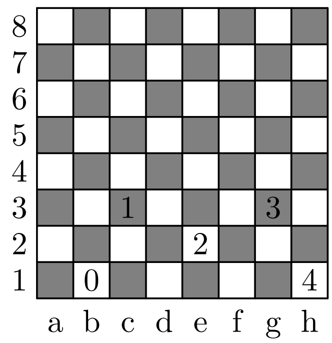
1. *Je možné premiestniť jazdca štyrmi ťahmi na políčko H1?*
2. *Je možné premiestniť jazdca piatimi ťahmi na políčko E6?*

Ak áno, popíšte všetky možné postupnosti ťahov. Ak nie, zdôvodnite, prečo to možné nie je. (*Katarína Jasenčáková*)

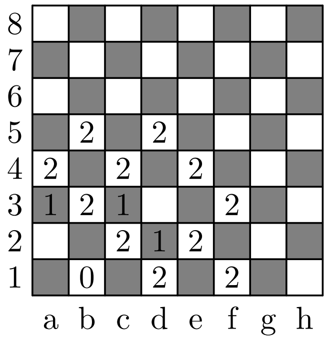
Nápad. Označte si postupne políčka, na ktoré možno jazdca premiestniť po prvom ťahu, po druhom ťahu atď.

Riešenie. I keď v zadaní sú použité pre označenie stĺpcov veľké písmená, v riešení budeme používať malé.

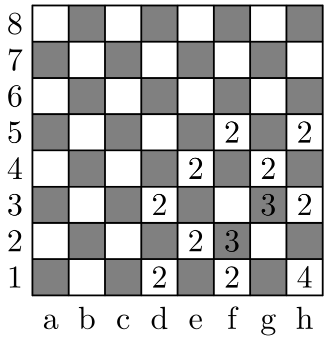
1. Po chvíli skúšania zistíme, že doskákať s jazdcom z políčka b1 na políčko h1 v štyroch ťahoch sa dá napr. takto: c3, e2, g3, h1, pozri obrázok.



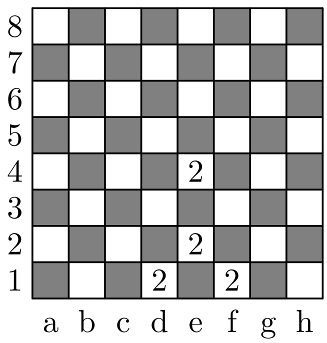
Aby sme doplnili všetky postupnosti ťahov medzi týmito políčkami a na žiadnu možnosť nezabudli, budeme postupovať nasledovne. Určíme všetky políčka, na ktoré sa dá jazdec z b1 premiestniť po prvom a po druhom ťahu:



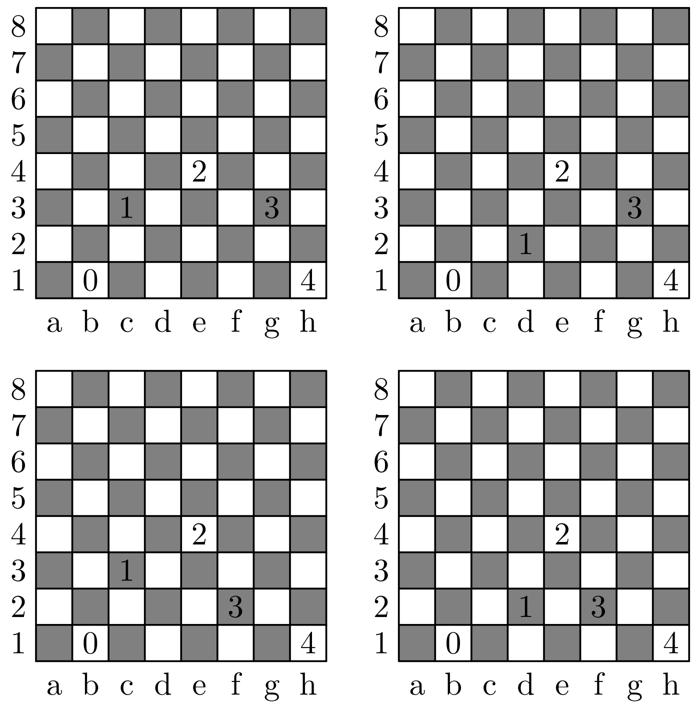
Určíme všetky políčka, na ktorých musí jazdec stať po treťom a po druhom ťahu, aby po štvrtom ťahu skončil na h1:



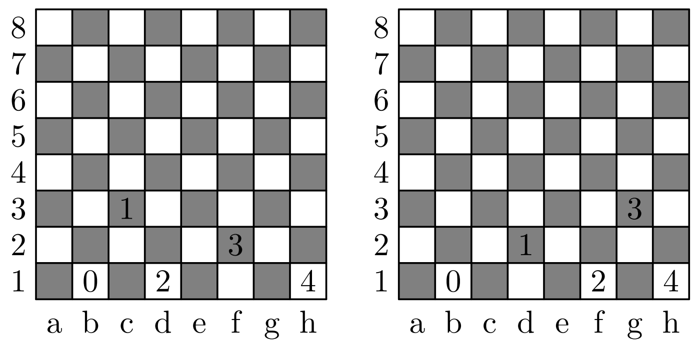
Určíme prienik predchádzajúcich dvoch situácií po druhom ťahu:



Možnosť s jazdcom po druhom ťahu na e2 je jedna, a to je práve vyššie uvedené riešenie. Možnosti s jazdcom po druhom ťahu na e4 sú štyri:



Možnosť s jazdcom po druhom ťahu na d1 je jedna, rovnako ako možnosť s jazdcom po druhom ťahu na f1:



2. Ľahko možno nájsť tiež cestu z políčka b1 na políčko e6 v štyroch ťahoch, ale v piatich už nie. Dôvodom je to, že farba políčka, na ktorom jazdec stojí, sa po každom jeho ťahu mení (jeden ťah jazdca má dve časti: dlhšia časť je o dve políčka, a pri tom sa farba zachováva, kratšia časť je o jedno políčko, a pri tom sa farba mení):

Východiskové políčko b1 je biele, po prvom ťahu bude jazdec stať na čiernom políčku, po druhom ťahu bude opäť na bielom atď. – po nepárnom počte ťahov bude na čiernom políčku, po párnom počte ťahov bude na bielom políčku. Políčko e6 je biele a 5 je nepárne číslo, preto sa nedá premiestniť jazdec z b1 na e6 v piatich ťahoch.

Poznámka. Sedem možných riešení v prvej časti úlohy možno nájsť náhodným skúšaním a následne sa zamyslieť nad zdôvodnením, že sú tieto riešenia všetky. Pri hodnotení buďte zhovievaví, aj nie celkom úplné zdôvodnenia možno hodnotiť stupňom 1. Avšak komentáre neobsahujúce žiadne vysvetlenie hodnoťte nanajvýš stupňom 2.

5. *V plechovke boli červené a zelené cukríky. Cyril zjedol $\frac{2}{5}$ všetkých červených cukríkov a Zuzka zjedla $\frac{3}{5}$ všetkých zelených cukríkov. Teraz tvoria červené cukríky $\frac{3}{8}$ všetkých cukríkov v plechovke. Koľko najmenej cukríkov mohlo byť pôvodne v plechovke?*

(*Lucie Růžičková*)

Nápad. Koľko cukríkov tej-ktorej farby mohlo, resp. nemohlo byť pôvodne v plechovke?

Riešenie. Ako Cyril, tak Zuzka zjedli niekoľko pätín cukríkov prislúchajúcej farby. Preto musí byť pôvodný počet ako červených, tak zelených cukríkov deliteľný piatimi. Budeme ako pôvodný počet červených cukríkov uvažovať čo najmenšie čísla deliteľné piatimi a skúsime vyjadriť počet zelených cukríkov:

- Ak by červených cukríkov bolo pôvodne 5, zvýšili by z nich po odjedení 3. Tieto 3 cukríky by mali tvoriť $\frac{3}{8}$ všetkých zvyšných cukríkov, teda všetkých zvyšných cukríkov by bolo 8 a zvyšných zelených by tak bolo 5. Týchto 5 cukríkov by malo tvoriť zvyšné $\frac{2}{5}$ všetkých zelených, čo sa nedá.
- Ak by červených cukríkov bolo pôvodne 10, zvýšilo by z nich po odjedení 6. Týchto 6 cukríkov by malo tvoriť $\frac{3}{8}$ všetkých zvyšných cukríkov, teda všetkých zvyšných cukríkov by bolo 16 a zvyšných zelených by tak bolo 10. Týchto 10 cukríkov by malo tvoriť zvyšné $\frac{2}{5}$ všetkých zelených, takže všetkých zelených by pôvodne bolo 25.

Najmenší počet cukríkov, ktoré mohli byť pôvodne v plechovke, je $10 + 25 = 35$.

Iný nápad. Akú časť zvyšných cukríkov tvorili zelené cukríky?

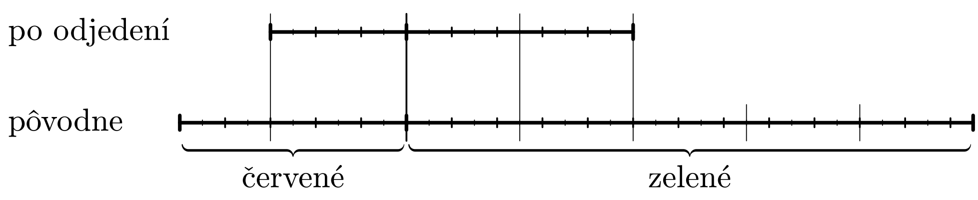
Iné riešenie. Červené cukríky tvorili po odjedení $\frac{3}{8}$ všetkých cukríkov, zelené cukríky tak tvorili $\frac{5}{8}$ všetkých zvyšných cukríkov, preto počet zvyšných zelených cukríkov musí byť deliteľný piatimi.

Zuzka zjedla $\frac{3}{5}$ zelených cukríkov, v plechovke tak zvýšili $\frac{2}{5}$ pôvodného počtu zelených cukríkov, preto počet zvyšných zelených cukríkov musí byť deliteľný aj dvoma. Celkom dostávame, že počet zvyšných zelených cukríkov musí byť deliteľný desiatimi.

Najmenší možný počet zvyšných zelených cukríkov je 10. V takom prípade by pôvodný počet zelených cukríkov bol 25, počet zvyšných červených cukríkov 6 a pôvodný počet červených cukríkov 10.

Najmenší počet cukríkov, ktoré mohli byť pôvodne v plechovke, je $10 + 25 = 35$.

Poznámka. Predchádzajúce úvahy je možné graficky znázorniť takto:



Pomocou neznámych c, resp. z, ktoré označujú pôvodné počty červených, resp. zelených cukríkov, je možné úlohu sformulovať takto:

$$\frac{3}{5}c = \frac{3}{8}\left(\frac{3}{5}c + \frac{2}{5}z\right),$$

pričom c a z sú čísla deliteľné piatimi a $\frac{3}{5}c + \frac{2}{5}z$ je deliteľné ôsmimi. Predchádzajúce vyjadrenie možno upraviť na

$$8c = 3c + 2z, \quad \text{čiže} \quad 5c = 2z.$$

Najmenšie c a z vyhovujúce všetkým uvedeným požiadavkám sú $c = 2 \cdot 5 = 10$ a $z = 5 \cdot 5 = 25$.

---

6. *Zostrojte ľubovoľnú úsečku DS, potom zostrojte kružnicu k so stredom v bode S, ktorá prechádza bodom D.*

1. *Zostrojte rovnostranný trojuholník DAS, ktorého vrchol A leží na kružnici k.*
2. *Zostrojte rovnostranný trojuholník ABC, ktorého vrcholy B a C tiež ležia na kružnici k.*

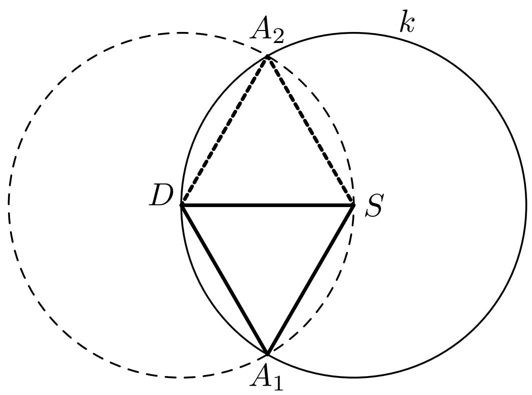
(*Lucie Růžičková*)

Nápad. Čo všetko viete o rovnostranných trojuholníkoch?

Riešenie. 1. Úsečky AS a AD majú byť zhodné s danou úsečkou DS. Teda

- bod A zostrojíme ako priesečník kružnice k a kružnice so stredom D a polomerom DS.

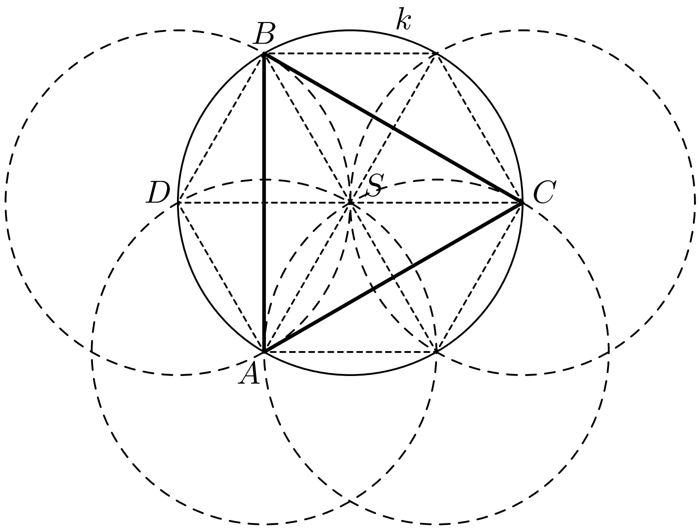
  Také body sú dva.



2. Pre trojuholník ABC s vrcholmi na kružnici k platí, že druhé priesečníky priamok AS, BS a CS s kružnicou k sú stredovo súmerné s bodmi A, B a C podľa stredu S. Ak je trojuholník ABC rovnostranný, je rovnostranný aj tento stredovo súmerný trojuholník. Všetkých šesť bodov na kružnici k potom tvorí vrcholy pravidelného šesťuholníka. Pravidelný šesťuholník je tvorený šiestimi zhodnými rovnostrannými trojuholníčkami, z ktorých dva sú zostrojené v prvej časti úlohy. Úsečka A_1A_2 na predchádzajúcom obrázku je preto jednou zo strán hľadaného trojuholníka:

- jeden z bodov A_1, A_2 v prvej časti úlohy označíme A, druhý označíme B,
- bod C zostrojíme ako priesečník kružnice k s priamkou DS.

Alternatívne možno bod C zostrojiť ako priesečník kružnice k s kružnicou so stredom v bode A, príp. B a polomerom AB. Na nasledujúcom obrázku je naznačené ešte iné riešenie založené na doplnení pravidelného šesťuholníka opakovaním konštrukcie z prvej časti úlohy.



Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Libuše Hozová, Marie Krejčová, Martin Mach, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Farkas Smitková, Libor Šimůnek, Erika Trojáková, Marta Volfová, Vojtěch Žádník
Recenzenti:	Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Farkas Smitková, Erika Trojáková , Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný, Vojtech Bálint
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017