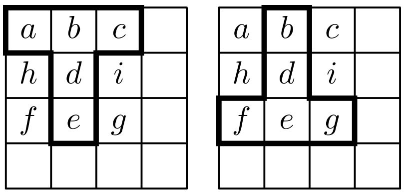
2001/2002
51. ročník MO

Riešenia úloh domáceho kola kategórie B

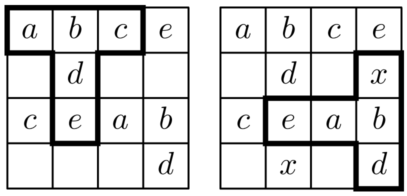
1. *Do tabuľky 4×4 sú vpísané kladné reálne čísla tak, že súčin v každej pätici tvaru je rovný 1. Zistite maximálny počet rôznych čísel zapísaných v tabuľke.* (P. Černek)

Riešenie.

Označme a, b, c, d, e, f, g, h, i čísla vpísané do ľavého horného štvorca 3×3 tabuľky (obr. 1). Keď porovnáme súčiny pre pätice tvaru a umiestnené v tejto časti tabuľky, musí platiť $abcde = bdefg$, čiže $ac = fg$. Analogicky pre pätice a nám vyjde $ahfdi = cigdh$, čiže $af = cg$. Pretože všetky čísla sú kladné, vyplýva z oboch rovností $f = c$ a $g = a$. Zároveň si uvedomme, že túto vlastnosť (t. j. rovnosť čísel v protiľahlých rohoch štvorca 3×3) musí mať každý zo štyroch takých štvorcov, ktoré v tabuľke existujú. To využijeme pri ďalšom dopĺňaní danej tabuľky.

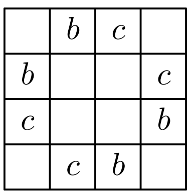


Obr. 1

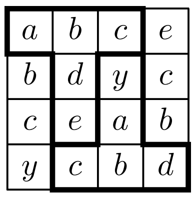


Obr. 2

Uvažujme opäť umiestnenie v ľavom hornom rohu danej tabuľky s vpísanými číslami a, b, c, d, e, doplňme ďalšie čísla podľa práve dokázanej vlastnosti a označme x chýbajúce číslo v pätici (obr. 2). Porovnaním oboch zhodných súčinov dostávame $abcde = abdex$, čiže $x = c$. Keby sme rovnakú úvahu urobili pre pätice polí a , ktoré dostaneme z uvažovaných pätíc preklopením podľa zvislej osi danej tabuľky, vyjde nám analogická rovnosť aj pre ďalšie dve dvojice polí tabuľky (obr. 3).



Obr. 3



Obr. 4

Teraz už máme tabuľku vyplnenú celú až na dve políčka, do ktorých vpíšeme číslo y (obr. 4). Porovnaním súčinov v oboch vyznačených päticiach dostávame $abcde = abcdy$, čiže $y = e$. Analogická rovnosť musí však platiť aj pre druhé dve centrálne polia tabuľky ležiace na druhej uhlopriečke, t. j. $d = a$. Stačí, aby sme celú úvahu zopakovali pre pätice polí, ktoré vzniknú z uvažovaných pätíc preklopením podľa zvislej osi danej tabuľky.

Všimnime si teraz vo vyplnenej tabuľke pätice polí vyznačených na obr. 5. Zrejme musí platiť $a^2bce = abce^2$, čiže $a = e$. Vidíme, že tabuľka obsahuje najviac tri rôzne čísla a, b, c (obr. 6), pričom $a^3bc = 1$. Teraz zostáva overiť, že rovnaký súčin a^3bc má každá pätica polí tvaru , ktorú možno do tabuľky umiestniť. Pretože vyplnená tabuľka je osovo súmerná podľa oboch uhlopriečok, a teda aj stredovo súmerná, stačí to overiť len pre štyri možné polohy rovnako orientovaných pätíc (napr. vo zvyčajnej polohe písmena T).

a	b	c	e
b	a	e	c
c	e	a	b
e	c	b	a

a	b	c	e
b	a	e	c
c	e	a	b
e	c	b	a

Obr. 5

a	b	c	a
b	a	a	c
c	a	a	b
a	c	b	a

Obr. 6

Odpoveď. V tabuľke sú zapísané najviac tri rôzne kladné čísla a, b, c, pričom $a^3bc = 1$.

---

2. *Určte, koľko čísel môžeme vybrať z množiny* $\{1, 2, 3, \dots, 75\,599, 75\,600\}$ *tak, aby medzi nimi bolo číslo* $75\,600$ *a aby pre ľubovoľné dve vybrané čísla a, b platilo, že a je deliteľom b alebo b je deliteľom a. (Uveďte všetky možnosti.)* (*J. Földes*)

Riešenie. Uvažujme množinu M, ktorá spĺňa podmienky zo zadania. Pretože M obsahuje číslo $75\,600$, musí byť aspoň jednoprvková. Ďalej si všimnime, že pokiaľ z množiny M odstránime nejaké číslo $a \neq 75\,600$, dostaneme množinu $\mathsf{M}' \subset \mathsf{M}$, ktorá rovnako spĺňa dané podmienky. Overme to. Množina M' aj naďalej obsahuje číslo $75\,600$. Ak sú x, y ľubovoľné dve čísla z množiny M', platí pre ne automaticky, že $x \mid y$ alebo $y \mid x$, pretože to pre ne platí ako pre prvky množiny M.

Tým sme vlastne dokázali, že pokiaľ nájdeme množinu, ktorá má m prvkov a spĺňa podmienky zadania, tak existuje k-prvková množina požadovaných vlastností pre ľubovoľné k, $1 \leqq k \leqq m$. Stačí teda nájsť vyhovujúcu množinu, ktorá má maximálny možný počet prvkov

Ak je a ľubovoľný prvok množiny M, je predovšetkým $a \leqq 75\,600$. Pokiaľ $a < 75\,600$, musí podľa zadania platiť, že $a \mid 75\,600$. Množina M teda obsahuje len delitele čísla $75\,600$.

Prvočíselný rozklad čísla $75\,600$ je $75\,600 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$. Každý deliteľ čísla $75\,600$ má teda tvar $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \cdot 7^\delta$, kde $0 \leqq \alpha \leqq 4$, $0 \leqq \beta \leqq 3$, $0 \leqq \gamma \leqq 2$, $0 \leqq \delta \leqq 1$. Každý prvok M je preto charakterizovaný usporiadanou štvoricou $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ zodpovedajúcich exponentov v uvedenom rozklade na prvočísla. Ak sú p a p' dva rôzne prvky M a platí napríklad $p < p'$, tak podľa zadania musí súčasne platiť $\alpha \leqq \alpha'$, $\beta \leqq \beta'$, $\gamma \leqq \gamma'$, $\delta \leqq \delta'$, pričom aspoň jedna nerovnosť musí byť ostrá (inak by platilo $p = p'$), odkiaľ vyplýva nerovnosť $\alpha + \beta + \gamma + \delta < \alpha' + \beta' + \gamma' + \delta'$. Pretože v našom prípade $0 \leqq \alpha + \beta + \gamma + \delta \leqq 10$, môže množina M obsahovať najviac 11 prvkov. Takou je napr. množina

$$\mathsf{D} = \{1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^4 \cdot 3, 2^4 \cdot 3^2, 2^4 \cdot 3^3, 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5, 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2, 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7\}.$$

Tým sme dokázali, že z danej množiny môžeme (vrátane čísla $75\,600$) vybrať požadovaným spôsobom $1, 2, \dots, 11$ prvkov.

---

3. *Nech k je polkružnica zostrojená nad priemerom AB, ktorá leží vo vnútri štvorca $ABCD$. Uvažujme jej dotyčnicu t_1 z bodu C (rôznu od BC) a označme P jej priesečník so stranou AD. Nech t_2 je spoločná vonkajšia dotyčnica polkružnice k a kružnice vpísanej trojuholníku CDP (rôzna od AD). Dokážte, že priamky t_1 a t_2 sú navzájom kolmé.* (*J. Švrček*)

Riešenie. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že dĺžka strany štvorca $ABCD$ je 1. Označme M stred strany AB a U priesečník priamok t_1, t_2 (obr. 7). Ďalej označme

ℓ kružnicu vpísanú trojuholníku CDP, S jej stred a r polomer. Ďalej nech Q a R sú postupne dotykové body priamky t_1 s kružnicou ℓ a polkružnicou k. Položme $x = |AP|$. V riešení využijeme známy fakt, že vzdialenosti oboch dotykových bodov od priesečníkov dotyčníc sú zhodné. Takto napríklad dostávame

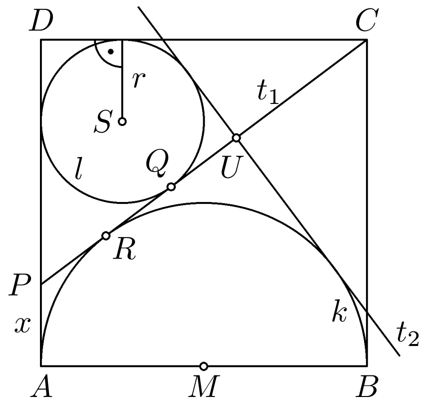
$$|CP| = |CR| + |RP| = |CB| + |AP| = 1 + x. \tag{1}$$

Riešenie urobíme v troch krokoch, pritom každý z nich urobíme viacerými spôsobmi:

1. krok. Výpočet dĺžky x.

2. krok. Výpočet polomeru r.

3. krok. Dôkaz kolmosti priamok t_1 a t_2.



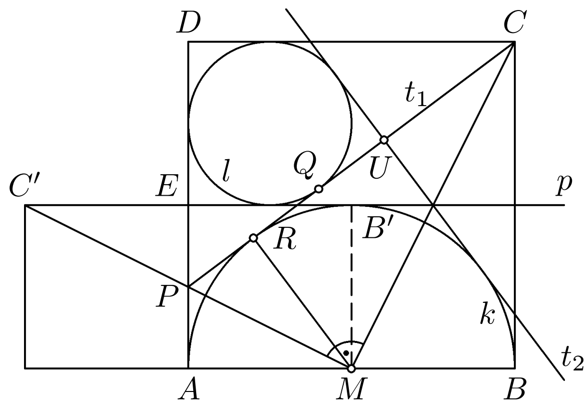
Obr. 7

1. krok, 1. spôsob.

Uvažujme pravouhlý trojuholník CDP. Dĺžka jeho prepony sa podľa (1) rovná $1 + x$ a dĺžky odvesien sú 1 a $1 - x$ Z Pytagorovej vety teda dostávame

$$(1 + x)^2 = 1^2 + (1 - x)^2.$$

Riešením tejto (po úprave lineárnej) rovnice je $x = 1/4$.



Obr. 8

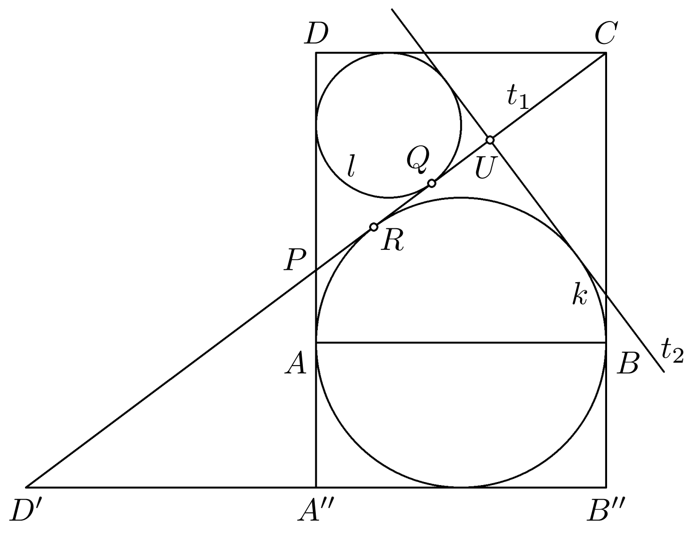
1. krok, 2. spôsob.

Označme C' bod, ktorý vznikne otočením bodu C okolo stredu M o $90°$ v kladnom smere. Potom bod C' leží na priamke p, ktorá je obrazom priamky BC v uvedenom otočení (obr. 8), pričom rovnobežné úsečky $C'E$ a AM majú rovnakú dĺžku $1/2$. Pretože priamka MP je osou uhla AMR a priamka MC osou uhla BMR, sú priamky MP a MC navzájom kolmé, takže bod C' leží na priamke MP. Trojuholníky PAM' a PEC' sú teda súmerne združené podľa stredu P, a preto $x = |AP| = |AE|/2 = 1/4$.

2. krok, 1. spôsob.

Ak je ϱ polomer kružnice vpísanej trojuholníku so stranami a, b, c, je jeho obsah rovný $(a+b+c)\varrho/2$. Pre pravouhlý trojuholník CDP, v ktorom poznáme dĺžky všetkých strán, tak dostávame (pripomeňme, že $|PC| = 1 + x = 5/4$)

$$r = \frac{\frac{1}{2}|CD| \cdot |DP|}{\frac{1}{2}(|CD| + |DP| + |PC|)} = \frac{1}{4}.$$



Obr. 9

2. krok, 2. spôsob.

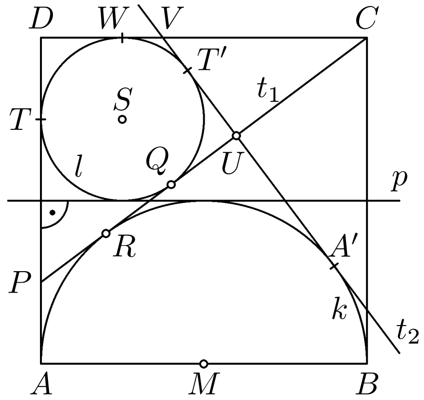
Nech $A''B''$ je obraz úsečky AB v posunutí v smere polpriamky CB o dĺžku $1/2$ (obr. 9). Označme D' priesečník priamok $A''B''$ a t_1. Potom kružnica, ktorej časťou je polkružnica k, je vpísaná trojuholníku $D'B''C$ a naviac sú trojuholníky $D'B''C$ a CDP podobné. Pomer polomerov ich vpísaných kružníc je teda rovný pomeru ich kratších odvesien. To znamená, že $(1/2) : r = (3/2) : (3/4)$, čiže $r = 1/4$.

3. krok, 1. spôsob.

Podľa druhého kroku vieme, že priemer kružnice ℓ je rovný polomeru polkružnice k. Preto priamka p (os úsečky AD) je spoločnou vnútornou dotyčnicou polkružnice k a kružnice ℓ (obr. 10). Pritom priamka p je kolmá na priamku AD, ktorá je ich vonkajšou spoločnou dotyčnicou. V osovej súmernosti podľa spojnice stredov SM oboch kružníc je obrazom vonkajšej dotyčnice AD vonkajšia dotyčnica t_2 a obrazom vnútornej dotyčnice p vnútorná dotyčnica t_1. Preto sú navzájom kolmé aj dotyčnice t_1 a t_2.

3. krok, 2. spôsob.

Označme V priesečník priamky t_2 so stranou CD. Pretože dĺžky oboch spoločných vonkajších dotyčníc (pokiaľ ich berieme ako úsečky, ktorých krajnými bodmi sú doty-



Obr. 10

kové body) polkružnice k a kružnice ℓ sú zhodné, t. j. $|AT| = |A'T'|$, dostávame na základe zhodnosti dĺžok dotyčníc z bodu P ku kružnici ℓ a zhodnosti dĺžok dotyčníc z bodu U k polkružnici k

$$|AT| = |AP| + |PT| = |AP| + |PQ| = 2|AP| + |RQ|,$$
$$|A'T'| = |A'U| + |UT'| = |RU| + |UQ| = |RQ| + 2|UQ|,$$

čo znamená, že $|UQ| = |AP| = 1/4$. Ďalej z rovnosti dĺžok dotyčníc z bodu C k polkružnici k a kružnici ℓ dostávame $|RQ| = |CR| - |CQ| = |CB| - |CW| = 1 - 3/4 = 1/4$. To znamená, že $|PU| = 3/4 = |PD|$, takže štvoruholník $PUVD$ je deltoid, a teda $|\measuredangle PUV| = |\measuredangle PDV| = 90°$, t. j. priamky t_1 a t_2 sú navzájom kolmé.

Tým je dôkaz hotový.

---

4. *Pokiaľ máme $n \geqq 2$ prirodzených čísel, môžeme s nimi spraviť nasledujúcu operáciu: Vyberieme niekoľko z nich, ale nie všetky a každé z vybraných čísel nahradíme ich aritmetickým priemerom. Zistite, či je možné pre ľubovoľnú začiatočnú n-ticu dostať po konečnom počte krokov všetky čísla rovnaké, ak n sa rovná*

a) 2 000, *b)* 35, *c)* 3, *d)* 17. (*J. Földes*)

Riešenie. Rozoberme najprv prípad a), teda $n = 2\,000$. Vyberme tisíc čísel a urobme s nimi danú operáciu. Potom vezmime zvyšných tisíc čísel a rovnako s nimi urobme danú operáciu. Dostaneme tisíc čísel rovných a a tisíc čísel rovných b. Pokiaľ $a = b$, je úloha vyriešená. Pokiaľ $a \neq b$, tak postupne vyberajme číslo rovné a a číslo rovné b a nahraďme ich priemerom $(a + b)/2$. Takto môžeme vybrať 1 000 dvojíc a všetky čísla nahradiť číslom $(a+b)/2$. Teda pre $n = 2\,000$ existuje postupnosť krokov, ktorá prevedie ľubovoľných 2 000 čísel na rovnaké čísla.

Prípad $n = 35$ budeme riešiť podobne. Vyberme 7 disjunktných pätíc a v každej z nich urobme operáciu popísanú vyššie, pričom v každej dostaneme rovnaké čísla. Z každej nanovo vytvorenej pätice vyberieme teraz jedno číslo. Dostaneme 7 čísel, s ktorými opäť urobíme danú operáciu. Podobným spôsobom vyberme ďalšie sedmice a vytvorme zodpovedajúce priemery. Všetky sedmice budú rovnaké, lebo v každej pätici máme rovnaké čísla. Všetky čísla budú teda rovnaké. Aj v tomto prípade existuje postupnosť krokov, ktorá prevedie ľubovoľných 35 čísel na rovnaké čísla.

Uvažujme $n = 3$. Uvažujme trojicu čísel $(1, 1, 2)$. Robiť danú operáciu s dvoma jednotkami nemá zmysel, takže po prvom kroku, ktorý zmení našu trojicu, dostaneme čísla $(1, 3/2, 3/2)$. Znovu sme dostali dve čísla rovnaké, ktoré sa neoplatí „priemerovať“. Teda ďalší krok, ktorý zmení našu trojicu, ju nechá v tvare $(5/4, 5/4, 3/2)$. Všimnime si, že po každom kroku je súčet čísel rovnaký. Dokážeme to aj vo všeobecnom prípade. Označme $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dané čísla. Bez ujmy na všeobecnosti urobme krok s prvými m $(m < n)$ číslami. Dostaneme čísla

$$\underbrace{\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m}, \ldots, \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m}}_{m\text{-krát}}, a_{m+1}, \ldots, a_n.$$

Ich súčet je $m \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_m)/m + a_{m+1} + \ldots + a_n = a_1 + \ldots + a_n$. Tým je uvedené tvrdenie dokázané.

Ak teda máme dostať z čísel $(1, 1, 2)$ všetky čísla rovnaké, na konci úprav musíme dostať všetky čísla rovné $(2 + 1 + 1)/3 = 4/3$. Všimnime si, že pri postupných krokoch sa v menovateli čísel objavujú len mocniny čísla 2. Dokážeme to matematickou indukciou.

V prvom kroku to zrejme platí. Po k krokoch máme tri čísla, ktoré majú v menovateli len mocniny čísla 2. V ďalšom kroku môžeme vybrať buď jedno číslo, ktoré nám trojicu nezmení, alebo dve čísla. Ak ich nahradíme ich priemerom, budeme zrejme deliť číslom 2. A znovu dostaneme v menovateli len mocninu dvojky. V každom kroku dostaneme teda do menovateľa iba mocniny dvojky, ale na konci úprav tam máme mať číslo 3, čo je spor. Zistili sme, že pre $n = 3$ neexistuje pre každú trojicu čísel postupnosť krokov, ktorá zmení všetky čísla na rovnaké.

Prípad $n = 17$ dokážeme podobne ako prípad $n = 3$. Ukázali sme skôr (pre všeobecné n), že v každom kroku zostáva zachovaný súčet čísel. Vezmime teda nejakú 17-ticu prirodzených čísel, ktorých súčet nie je deliteľný 17. Na konci máme dostať 17-ticu rovnakých čísel rovných $(a_1 + a_2 + \ldots + a_{17})/17$, pričom tento zlomok je v základnom tvare. V žiadnom kroku však nedostaneme do menovateľa číslo deliteľné 17. Toto tvrdenie znovu dokážeme indukciou. Prvý krok je zrejmý. Po k krokoch dostaneme 17-ticu čísel, v ktorých menovateľoch nie je číslo deliteľné 17. Z týchto čísel vezmime $m < 17$ a sčítajme ich. Podľa indukčného predpokladu dostaneme v menovateli najmenší spoločný násobok menovateľov vybraných čísel. Ten podľa indukčného predpokladu nebude deliteľný 17. Pokiaľ teraz tento súčet vydelíme číslom $m < 17$, nedostaneme v menovateli číslo deliteľné 17. Preto ani po $k + 1$ krokoch nedostaneme v menovateli číslo deliteľné 17. Pretože na konci musíme dostať čísla, ktoré majú v menovateli 17, dostávame spor. Pre niektoré 17-tice prirodzených čísel teda nedokážeme nájsť postupnosť krokov, ktorá z nich vytvorí rovnaké čísla.

---

5. *Zistite, pre ktoré reálne čísla p má sústava*

$$x^2y - 2x = p,$$
$$y^2x - 2y = 2p - p^2$$

práve tri riešenia v obore reálnych čísel. (*P. Černek*)

Riešenie. Pokiaľ vynásobíme prvú rovnicu neznámou y a druhú neznámou x, dostaneme na ľavej strane oboch rovníc $x^2y^2 - 2xy$. Porovnaním pravých strán máme

$$py = p(2 - p)x. \tag{1}$$

Pokiaľ $p = 0$, má daná sústava tvar

$$\begin{aligned} x^2y - 2x &= 0, \\ y^2x - 2y &= 0, \end{aligned}$$

pričom po jednoduchej úprave

$$\begin{aligned} x(xy - 2) &= 0, \\ y(xy - 2) &= 0. \end{aligned}$$

Vidíme, že sústava má nekonečne veľa riešení. Je ním každá dvojica (x, y) reálnych čísel taká, že $xy = 2$. (Okrem týchto dvojíc je riešením iba dvojica $x = y = 0$.)

Pokiaľ $p = 2$, dostaneme sústavu

$$\begin{aligned} x(xy - 2) &= 2, \\ y(xy - 2) &= 0, \end{aligned}$$

ktorá má jediné riešenie $y = 0$, $x = -1$.

Vráťme sa teraz k rovnici (1), pričom budeme ďalej predpokladať, že $p \notin \{0, 2\}$. Rovnicu vydelíme číslom p. Dostaneme

$$y = (2 - p)x. \tag{2}$$

Dosadením tohto vzťahu do prvej z daných rovníc dostávame ($p \neq 2$) kubickú rovnicu

$$(2 - p)x^3 - 2x - p = 0. \tag{3}$$

Riešenie kubickej rovnice vo všeobecnosti nie je také jednoduché ako riešenie kvadratickej rovnice. V našom prípade však môžeme uhádnuť jeden jej koreň $x = -1$. Potom môžeme polynóm $(2 - p)x^3 - 2x - p$ bezo zvyšku vydeliť koreňovým činiteľom $x + 1$. Vydelením dostávame

$$(2 - p)x^3 - 2x - p = (x + 1)\big((2 - p)x^2 + (p - 2)x - p\big).$$

Stačí teda vyriešiť kvadratickú rovnicu

$$(2 - p)x^2 + (p - 2)x - p = 0. \tag{4}$$

Uvedomme si, že neznáma y je jednoznačne určená neznámou x pomocou vzťahu (2). Ak má teda mať daná sústava práve tri riešenia, musí mať rovnica (3) tri navzájom rôzne riešenia. To znamená, že rovnica (4) musí mať dve rôzne riešenia, ktoré sa naviac nerovnajú -1. Budeme skúmať, kedy je diskriminant D rovnice (4) kladný. Jednoduchým výpočtom dostávame

$$D = (p - 2)^2 - 4(2 - p)(-p) = (2 - p)(3p + 2).$$

Odtiaľ vidíme, že $D > 0$ práve vtedy, keď $p \in (-2/3, 2)$. Dosadením $x = -1$ ľahko vidíme, že rovnica (4) má koreň -1 len pre $p = 4/3$. Rovnica (3) má preto tri rôzne riešenia práve vtedy, keď $p \in (-2/3, 0) \cup (0, 4/3) \cup (4/3, 2)$.

Obrátene, ak má rovnica (3) tri rôzne riešenia, má tri rôzne riešenia aj sústava (2), (3), ktorá je však pre $p \neq 0$ a $p \neq 2$ ekvivalentná s danou sústavou.

Odpoveď. Daná sústava má v obore reálnych čísel práve tri riešenia práve vtedy, keď $p \in (-2/3, 0) \cup (0, 4/3) \cup (4/3, 2)$.

Poznámka. Úlohu možno riešiť viacerými spôsobmi – napríklad z prvej rovnice vyjadriť neznámu y pomocou x a to dosadiť do druhej rovnice, alebo prvú rovnicu vydeliť x a druhú y a získané rovnice odčítať. Oba tieto spôsoby opäť vedú ku kubickej rovnici (3).

6. *Je daný rovnostranný trojuholník MPQ. Nájdite množinu vrcholov C všetkých trojuholníkov ABC takých, že body P, Q sú päty výšok z vrcholov A, B a bod M je stred strany AB.* (J. Šimša)

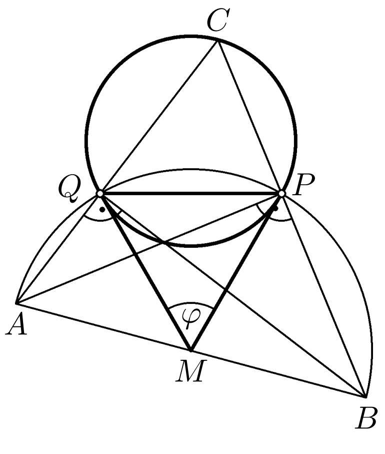
Riešenie. Uvažujme trochu všeobecnejšiu úlohu. Predpokladajme len, že trojuholník MPQ je rovnoramenný so základňou PQ, pričom $|\measuredangle PMQ| = \varphi$. Označme štandardne α, β, γ vnútorné uhly trojuholníka ABC. Body P, Q sú päty výšok z bodov A, B, takže body A, B, P, Q ležia na kružnici so stredom M (ide o Tálesovu kružnicu nad priemerom AB). To znamená, že $|MA| = |MB| = |MP| = |MQ|$, a teda trojuholník AMQ (pokiaľ $A \neq Q$) je rovnoramenný; analogicky trojuholník BMP. Potom platí

$$\begin{gathered}|\measuredangle AMQ| = 180^\circ - 2|\measuredangle MAQ|,\\ |\measuredangle BMP| = 180^\circ - 2|\measuredangle MBP|, \qquad |\measuredangle PCQ| = \gamma.\end{gathered} \tag{1}$$

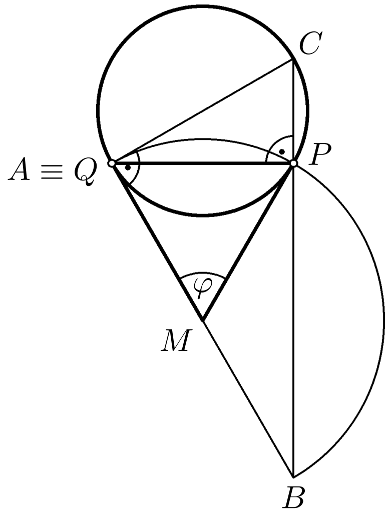
Ďalej rozoberme niekoľko prípadov podľa toho, či má byť trojuholník ABC ostrouhlý, pravouhlý, alebo tupouhlý.

Prípad 1. Trojuholník ABC je ostrouhlý (obr. 11). Zrejme body M a C ležia v opačných polrovinách určených priamkou PQ. Naviac platí $|\measuredangle MAQ| = \alpha$, $|\measuredangle MBP| = \beta$ a $|\measuredangle AMQ| + \varphi + |\measuredangle BMP| = 180^\circ$, odkiaľ po dosadení (1) dostávame $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ - \varphi/2$.

Prípad 2. Trojuholník ABC má pri vrchole A pravý uhol (obr. 12). Zrejme body M a C ležia v opačných polrovinách určených priamkou PQ. Ďalej $A \equiv Q$ a $|\measuredangle BMP| = 180^\circ - \varphi$. Z (1) potom vyplýva $\beta = |\measuredangle MBP| = \varphi/2$, a teda $\gamma = 90^\circ - \varphi/2$. Pokiaľ je pravý uhol pri vrchole B, analogicky dostaneme $\gamma = 90^\circ - \varphi/2$.

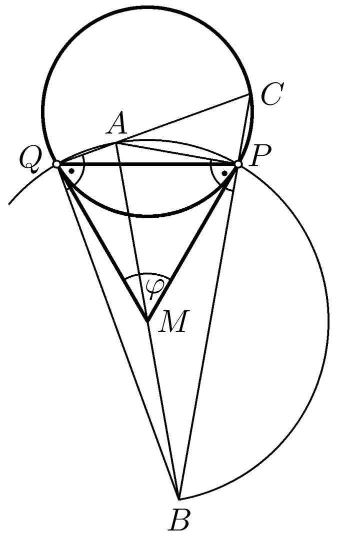


Obr. 11

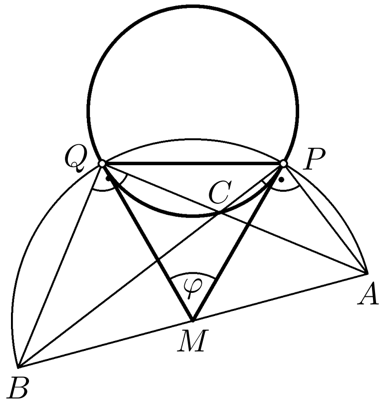


Obr. 12

Prípad 3. Trojuholník ABC má pri vrchole A tupý uhol (obr. 13). Zrejme body M a C ležia v opačných polrovinách určených priamkou PQ. Pritom $|\measuredangle MAQ| = 180^\circ - \alpha$, $|\measuredangle MBP| = \beta$ a $\varphi - |\measuredangle AMQ| + |\measuredangle BMP| = 180^\circ$, odkiaľ po dosadení (1) dostávame $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ - \varphi/2$. Ak je tupý uhol pri vrchole B, analogicky dostaneme $\gamma = 90^\circ - \varphi/2$.



Obr. 13



Obr. 14

Prípad 4. Trojuholník ABC má pri vrchole C tupý uhol (obr. 14). Zrejme body M a C ležia v rovnakej polrovine určenej priamkou PQ. Ďalej z pravouhlých trojuholníkov ABQ a ABP dostávame $|\measuredangle MAQ| = \alpha$, $|\measuredangle MBP| = \beta$ a $|\measuredangle AMQ| + |\measuredangle BMP| = 180^\circ + \varphi$. Z (1) potom vyplýva $\gamma = 90^\circ + \varphi/2$.

Zrejme trojuholník ABC nemôže mať pri vrchole C pravý uhol, inak by body C, P, Q boli totožné. Celkovo sme teda dostali, že pokiaľ bod C leží v polrovine opačnej k polrovine PQM, platí $|\measuredangle PCQ| = 90^\circ - \varphi/2$, a ak bod C leží v polrovine PQM, platí $|\measuredangle PCQ| = 90^\circ + \varphi/2$. Množinou všetkých takých bodov C je teda kružnica, označme ju k, nad tetivou PQ s výnimkou bodov P, Q (kde väčší oblúk kružnice k je časťou množiny všetkých bodov X takých, že $|\measuredangle PXQ| = 90^\circ - \varphi/2$).

Naopak, nech $C \in k \setminus \{P, Q\}$ a MPQ je rovnoramenný trojuholník so základňou PQ. Potom si ľahko uvedomíme, ako by sme zostrojili body A, B. Bod A leží na priamke CQ a na priamke, ktorá je kolmá na CP a prechádza bodom P. Analogicky dostaneme bod B. V takomto trojuholníku ABC budú body P, Q pätami výšok z vrcholov A, B. Stačí teda dokázať, že M je stred AB. Označme N stred strany AB. Dokážeme, že $M \equiv N$. Označme $\psi = |\measuredangle PNQ|$. Zrejme bod N leží v polrovine PQM a je stredom kružnice, na ktorej ležia body A, B, P, Q, takže trojuholník NPQ je rovnoramenný so základňou PQ. Pritom z vyššie uvedených úvah vyplýva, že pokiaľ bod C leží v polrovine opačnej k polrovine PQM, platí $\gamma = 90^\circ - \psi/2$, a pokiaľ bod C leží v polrovine PQM, platí $\gamma = 90^\circ + \psi/2$. To znamená, že $\psi = \varphi$. Naviac oba body M a N ležia na osi úsečky PQ. Takže nutne $M \equiv N$, a teda M je naozaj stred strany AB.

Odpoveď. Hľadanou množinou všetkých vrcholov C je kružnica k s výnimkou bodov P, Q. Špeciálne pre $\varphi = 60^\circ$ je k kružnica súmerne združená s kružnicou opísanou trojuholníku MPQ podľa priamky PQ.

Iné riešenie. Uvažujme znovu všeobecnejšiu úlohu ako v predchádzajúcom riešení. Opäť si uvedomme, že body A, B, P, Q ležia na kružnici so stredom M. Vzhľadom na to, že M je stred úsečky AB, leží aspoň jeden z bodov A, B nutne v polrovine PQM. Bez ujmy na všeobecnosti nech je to bod B. Potom z vety o obvodových uhloch vyplýva, že $|\measuredangle QBP| = \varphi/2$. Ďalej

$$|\measuredangle BCQ| = 90^\circ - |\measuredangle QBC| = 90^\circ - |\measuredangle QBP| = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}.$$

Pokiaľ $\gamma < 90^\circ$, leží bod C v polrovine opačnej k polrovine PQM a platí $\gamma = |\measuredangle BCQ| = 90^\circ - \varphi/2$. Pokiaľ $\gamma > 90^\circ$, leží bod C v polrovine PQM a platí $\gamma = 180^\circ - |\measuredangle BCQ| = 90^\circ + \varphi/2$.

Ďalší postup je už analogický ako v prvom riešení.

Diskusiu prípadov v oboch riešeniach môžeme čiastočne obísť. Stačí si uvedomiť niekoľko faktov. Ak V je priesečníkom výšok v trojuholníku ABC, je bod C priesečníkom výšok v trojuholníku ABV. Preto trojuholník ABC má vlastnosť zo zadania úlohy práve vtedy, keď ju má trojuholník ABC', kde $C' = V$. Znamená to, že množina vrcholov C všetkých vyhovujúcich trojuholníkov je totožná s množinou ich priesečníkov výšok V. Pretože body C, V ležia vždy v opačných polrovinách určených priamkou PQ a platí $|\measuredangle PVQ| + |\measuredangle PCQ| = 180^\circ$, stačí nájsť množinu vrcholov C len v jednej zo spomenutých polrovín (ako už vieme, je ňou kružnicový oblúk), v druhej polrovine touto množinou potom musí byť doplnok toho oblúka na celú kružnicu.