

67. ročník Matematickej olympiády  
2017/2018

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z6

Informácia pre okresnú komisiu MO:

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideluje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín okresných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu okresného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: [skmo.sk](http://skmo.sk). Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu [skmo@skmo.sk](mailto:skmo@skmo.sk) v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke [skmo.sk/dokument.php?id=429](http://skmo.sk/dokument.php?id=429) nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skráteno len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.

1. Janko dostal na Vianoce knihu, ktorú hneď na Štedrý deň 24. decembra začal čítať. Čítal denne rovnaký počet strán, a to až do 31. januára v novom roku. Toho dňa zistil, že zatiaľ prečítal 78 strán, čo bola práve tretina knihy. Súčasne zistil, že ak by chcel knihu dočítať práve v deň svojich narodenín, musel by počínajúc zajtrajškom každý deň prečítať o štyri strany viac ako doposiaľ. Určte, kedy má Janko narodeniny.

(Miroslava Farkas Smitková)

**Riešenie.** Keďže 78 strán zodpovedá tretine knihy, má celá kniha  $3 \cdot 78 = 234$  strán. Jankovi ostáva prečítať ešte  $234 - 78 = 156$  strán.

Od Vianoc do 31. januára uplynulo celkom  $8 + 31 = 39$  dní. Preto Janko denne prečítal  $78 : 39 = 2$  strany. Ak by počínajúc 1. februárom denne prečítal o štyri strany viac ako doposiaľ, teda šesť strán, dočítal by knihu za  $156 : 6 = 26$  dní. Janko má narodeniny 26. februára.

*Návrh hodnotenia.* Po 1 bode za každý z čiastočných výsledkov (knihy má 234 strán, ostáva dočítať 156 strán, do konca januára čítal 39 dní, čítal 2 strany denne, knihu dočíta za 26 dní); 1 bod za deň narodenín.

2. Evička mala stavebnicu s deviatimi dielikmi, ktoré boli označené 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9. Časom sa jej podarilo všetky dieliky stratiť, a to nasledujúcim spôsobom:

- najskôr stratila štyri dieliky označené nepárnymi číslami,
- potom stratila dieliky so súčynom čísel 24,
- nakoniec stratila posledné dva dieliky, na ktorých boli párne čísla.

Zistite, ktoré čísla mohli byť napísané na posledných dvoch dielikoch. Nájdite dve riešenia. (Erika Novotná)

**Riešenie.** Medzi uvedenými číslami je päť nepárnych čísel a štyri párne čísla. Po strate štyroch nepárnych čísel tak Evičke zostalo jedno nepárne číslo a všetky štyri párne (2, 4, 6, 8). Keďže 24 nie je násobkom 5, 7, ani 9, avšak je násobkom 1 a 3, mohlo byť zvyšné nepárne číslo buď 1, alebo 3.

Po strate dielikov so súčinom 24 zvýšili len dve párne čísla. Tento súčin preto musel byť vyjadrený pomocou jedného nepárneho čísla (a to buď 1, alebo 3) a dvoch párnych čísel (vybraných z 2, 4, 6 a 8). To je možné buď ako  $24 = 1 \cdot 4 \cdot 6$ , alebo ako  $24 = 3 \cdot 2 \cdot 4$ . V prvom prípade by na posledných dvoch dielikoch boli čísla 2 a 8, v druhom prípade by to boli čísla 6 a 8.

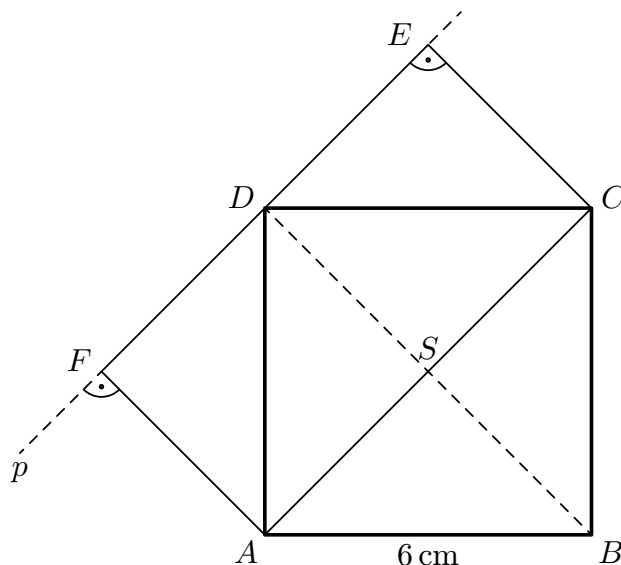
*Návrh hodnotenia.* 2 body za zistenie, že zvyšné nepárne číslo bolo buď 1, alebo 3; 2 body za zistenie, že 24 má byť súčinom jedného nepárneho a dvoch párnych čísel; 2 body za rozbor možností a záver.

Ak riešiteľ najskôr uvažuje všemožné súčiny ako  $24 = 3 \cdot 8 = 1 \cdot 3 \cdot 8$  a pod. a z toho vyberá vyhovujúce možnosti, musí byť z komentára zrejmé, prečo vyhovujú. Za riešenie bez zdôvodnenia dajte nanajvýš 2 body.

**3.** Zostrojte štvorec  $ABCD$  so stranou dĺžky 6 cm. Zostrojte priamku  $p$  rovnobežnú s uhlopriečkou  $AC$  a prechádzajúcu bodom  $D$ . Zostrojte obdĺžnik  $ACEF$  tak, aby vrcholy  $E$  a  $F$  ležali na priamke  $p$ . Zo zadaných údajov vypočítajte obsah obdĺžnika  $ACEF$ .  
(Lucie Růžičková)

**Riešenie.** Konštrukcia:

- Štvorec  $ABCD$  so stranou dĺžky 6 cm,
- priamka  $p$  ako rovnobežka s priamkou  $AC$  (resp. kolmica na priamku  $BD$ ) idúca bodom  $D$ ,
- bod  $E$  ako päta kolmice na priamku  $p$  idúcej bodom  $C$ ,
- bod  $F$  ako päta kolmice na priamku  $p$  idúcej bodom  $A$ .



Výpočet: Uhlopriečky vo štvorci sú zhodné, navzájom kolmé a ich priesečník je stredom oboch uhlopriečok. Priesečník uhlopriečok vo štvorci  $ABCD$  označíme  $S$ .

Z uvedeného vyplýva, že štvorec  $ABCD$  je uhlopriečkami rozdelený na štyri navzájom zhodné trojuholníky  $ABS$ ,  $BCS$ ,  $CDS$  a  $DAS$ . Ďalej obdĺžnik  $ACEF$  je úsečkou  $SD$  rozdelený na dva zhodné štvorce, pričom každý z nich je ďalej rozdelený uhlopriečkou ( $CD$ , resp.  $DA$ ) na dva zhodné trojuholníky. Ako štvorec  $ABCD$ , tak obdĺžnik  $ACEF$  teda pozostáva zo štyroch navzájom zhodných trojuholníkov, z ktorých dva sú obom útvarom spoločné. Preto má obdĺžnik  $ACEF$  rovnaký obsah ako štvorec  $ABCD$ , a ten je

$$6 \cdot 6 = 36 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

*Návrh hodnotenia.* 2 body za prevedenie konštrukcie; 4 body za výpočet, z toho 3 body za rozdelenie na zhodné trojuholníky a 1 bod za určenie obsahu. Výpočet založený len na meraní v obrázku, resp. správny výsledok bez zdôvodnenia nehodnotíte.

---

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Patrik Bak, Martin Kollár, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, Oliver Ralík, E. Semerádová, Miroslava Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník

Recenzenti: Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný, Patrik Bak

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018