67. ročník Matematickej olympiády
2017/2018

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z7

<u>*Informácia pre okresnú komisiu MO:*</u>

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín okresných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu okresného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: `skmo.sk`*. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu* `skmo@skmo.sk` *v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke* `skmo.sk/dokument.php?id=429` *nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.*

---

1. *Florián premýšľal, akú kyticu nechá mamičke uviazať na Deň matiek. V kvetinárstve podľa cenníka spočítal, že či kúpi 5 klasických gerber alebo 7 minigerber, kytica bude stáť po doplnení ozdobnej stuhy rovnako, a to 29,50 eur. Ak by však kúpil iba 2 minigerbery a 1 klasickú gerberu bez ďalších doplnkov, zaplatil by 10,20 eur. Koľko stojí 1 minigerbera?* (Libor Šimůnek)

Riešenie. Zo zadania vyplýva, že 5 klasických gerber stojí rovnako ako 7 minigerber, teda že cena klasickej gerbery a cena minigerbery sú v pomere $7:5$. Ak cenu klasickej gerbery znázorníme 7 rovnakými dielmi, cena minigerbery bude zodpovedať 5 takým dielom.

Cena nákupu 2 minigerber a 1 klasickej gerbery predstavuje $2\cdot 5+7=17$ týchto dielov, 1 diel preto zodpovedá sume $10{,}20:17=0{,}60$ eur. Jedna minigerbera stojí $5\cdot 0{,}60=3$ eurá.

Overíme ešte, že cena stuhy vychádza nezáporné číslo: Päť klasických gerber, resp. sedem minigerber stojí $5\cdot 7\cdot 0{,}60=21$ eur. Cena stuhy je $29{,}50-21=8{,}50$ eur.

Návrh hodnotenia. 2 body za zistenie, že ceny klasickej gerbery a minigerbery sú v pomere $7:5$; 2 body za zistenie zodpovedajúce rovnici $17d=10,20$; 2 body za odvodenie ceny minigerbery ($d = 0{,}60$, $5\cdot d=3$). Ak aj žiak neoverí, že cena stuhy vychádza nezáporné číslo, body nestŕhajte.

---

2. *Na stole ležalo šesť kartičiek s ciframi 1, 2, 3, 4, 5 a 6. Kamila z troch kartičiek zložila trojciferné číslo, ktoré bolo väčšie ako 500 a bolo deliteľné štyrmi. Filip zo zvyšných troch kartičiek zložil trojciferné číslo deliteľné tromi aj piatimi. Kamila potom obe trojciferné čísla sčítala a Filip si všimol, že tento súčet je trojciferné číslo, ktoré sa číta rovnako zľava ako sprava. Ktoré čísla mohli Kamila s Filipom zložiť? Určte všetky možnosti.* (Lucie Růžičková)

Riešenie. Filipovo číslo má byť deliteľné piatimi, preto z ponúkaných cifier musí na miesto jednotiek použiť 5. V Kamilinom čísle sa teda 5 vyskytovať nemôže. Zároveň má jej číslo byť väčšie ako 500, musí teda mať na mieste stoviek cifru 6.

Filipovo číslo má byť deliteľné tromi, tzn. jeho ciferný súčet má byť deliteľný tromi, teda súčet prvých dvoch cifier má po delení tromi dávať zvyšok 1. Z ponúkaných cifier tak Filip mohol zložiť čísla

$$135, \quad 315, \quad 345, \quad 435.$$

Kamilino číslo má byť deliteľné štyrmi, tzn. jeho posledné dvojčíslie má byť deliteľné štyrmi. Z ponúkaných cifier tak Kamila mohla zložiť čísla

$$612, \quad 624, \quad 632.$$

Zároveň má platiť, že čísla použité vo Filipovom čísle nemôžu byť v Kamilinom čísle, a naopak. Filip a Kamila teda mohli zložiť nasledujúce dvojice čísel:

Filip	135	315	345	435
Kamila	624	624	612	612
Súčet	759	939	957	1 047

Jediný súčet, ktorý sa číta zľava rovnako ako sprava, je 939. Filip zložil číslo 315, Kamila zložila číslo 624.

Návrh hodnotenia. Celkom 1 bod za zistenie, že Filipovo číslo končí cifrou 5 a Kamilino číslo začína cifrou 6; po 2 bodoch za určenie možných Filipových, resp. Kamiliných čísel vyhovujúcich podmienkam deliteľnosti; 1 bod za výber možných dvojíc, určenie ich súčtov a doriešenie.

Ak riešiteľ prehliadne niektorú z podmienok a okrem jediného možného riešenia uvedie ďalšie (napr. $632 + 145 = 777$), dajte nanajvýš 4 body. Za správne riešenie bez zdôvodnenia dajte nanajvýš 2 body.

Poznámka. Súčet všetkých šiestich daných cifier je deliteľný tromi a ciferný súčet Filipovho čísla má byť deliteľný tromi, preto aj ciferný súčet Kamilinho čísla musí byť deliteľný tromi. Tento poznatok vo vyššie uvedenom riešení vylučuje možnosť 632 medzi Kamilinými číslami.

---

3. *Zostrojte kružnicu so stredom S a polomerom 3 cm. Zostrojte dva navzájom kolmé priemery AC a BD tejto kružnice. Zostrojte rovnoramenné trojuholníky ABK, BCL, CDM, DAN tak, aby:*

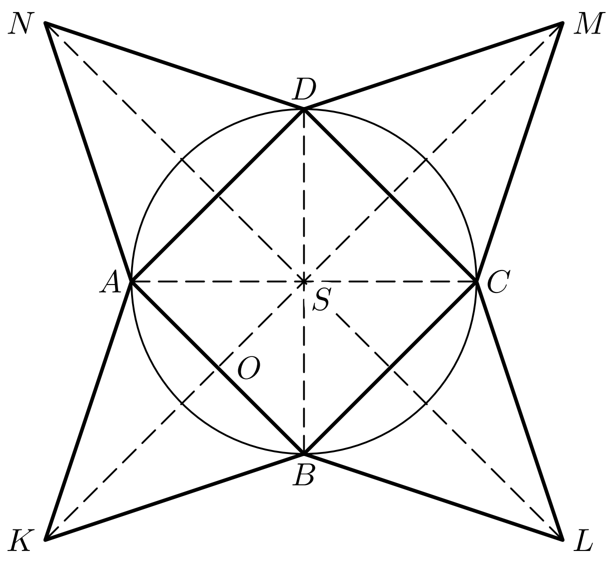
- *základňou každého trojuholníka bola strana štvoruholníka $ABCD$,*
- *základňa každého trojuholníka bola zhodná s výškou na túto stranu,*
- *žiadny trojuholník neprekrýval štvoruholník $ABCD$.*

Zo zadaných údajov vypočítajte obsah mnohouholníka $AKBLCMDN$.

(*Marie Krejčová*)

Riešenie. Rozbor:

Úsečky AC a BD sú zhodné, navzájom kolmé a stred každej z nich je totožný s ich priesečníkom. Preto body A, B, C, D tvoria vrcholy štvorca. Trojuholník ABK je rovnoramenný so základňou AB, preto jeho vrchol K leží na osi úsečky AB. Os úsečky AB je totožná s osou úsečky CD a na tejto priamke leží aj stred S štvorca $ABCD$ a vrchol M rovnoramenného trojuholníka CDM. Obdobné pozorovanie platí pre trojicu bodov L, S a N.



Konštrukcia:

- Kružnica so stredom S a polomerom 3 cm,
- navzájom kolmé priamky prechádzajúce bodom S, priesečníky s kružnicou označené A, C a B, D,
- štvoruholník (štvorec) $ABCD$,
- kolmica na priamku AB (totožná s kolmicou na priamku CD) idúca bodom S, päta kolmice označená O,
- bod K na polpriamke SO vo vzdialenosti $|AB|$ od bodu O,
- trojuholník ABK,
- ostatné body a trojuholníky analogicky.

Výpočet:

Mnohouholník $AKBLCMDN$ je zložený zo štvorca $ABCD$ a štyroch navzájom zhodných rovnoramenných trojuholníkov ABK, BCL, CDM, DAN.

Trojuholník ABK má ako základňu stranu štvorca $ABCD$ a zodpovedajúca výška je s ňou zhodná. Preto je obsah trojuholníka ABK rovný polovici obsahu štvorca $ABCD$ a obsah celého mnohouholníka $AKBLCMDN$ je rovný trojnásobku obsahu štvorca $ABCD$.

Štvorec $ABCD$ je uhlopriečkami rozdelený na štyri navzájom zhodné trojuholníky ABS, BCS, CDS a DAS. Každý z týchto trojuholníkov je pravouhlý a rovnoramenný s ramenami dĺžky 3 cm. Obsah štvorca je teda rovný

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 3}{2} = 18\,(\mathrm{cm}^2).$$

Obsah mnohouholníka $AKBLCMDN$ je teda rovný $3 \cdot 18 = 54\,(\mathrm{cm}^2)$.

Návrh hodnotenia. 2 body za rozbor a prevedenie konštrukcie; 4 body za výpočet, z toho 2 body za určenie vzťahu medzi obsahmi trojuholníka ABK a štvorca $ABCD$, 2 body za vyčíslenie obsahov štvorca a celého mnohouholníka. Výpočet založený len na meraní v obrázku, resp. správny výsledok bez zdôvodnenia nehodnoťte.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Patrik Bak, Martin Kollár, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, Oliver Ralík, E. Semerádová, Miroslava Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník
Recenzenti:	Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný, Patrik Bak
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018