51. ročník Matematickej olympiády
2001/2002 *Riešenia úloh školského kola kategórie B*

1. *Určte reálne číslo p tak, aby rovnica*

$$x^2 + 4px + 5p^2 + 6p - 16 = 0$$

mala dva rôzne korene x_1, x_2 a aby súčet $x_1^2 + x_2^2$ bol čo najmenší. (J. Šimša)

Riešenie. Pre korene x_1, x_2 danej kvadratickej rovnice (pokiaľ existujú) platí podľa Viètových vzťahov rovnosti

$$x_1 + x_2 = -4p \quad \text{a} \quad x_1 x_2 = 5p^2 + 6p - 16,$$

z ktorých vypočítame skúmaný súčet

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-4p)^2 - 2(5p^2 + 6p - 16) = \\ &= 6p^2 - 12p + 32 = 6(p-1)^2 + 26. \end{aligned}$$

Odtiaľ vyplýva nerovnosť $x_1^2 + x_2^2 \geqq 26$, pritom rovnosť môže nastať, len keď $p = 1$. Zistíme preto, či pre $p = 1$ má daná rovnica skutočne dve rôzne riešenia. Ide o rovnicu $x^2 + 4x - 5 = 0$ s koreňmi $x_1 = -5$ a $x_2 = 1$. Tým je úloha vyriešená.

Dodajme, že väčšina riešiteľov pravdepodobne najprv zistí, pre ktoré p má daná rovnica dva rôzne korene. Pretože pre jej diskriminant D platí

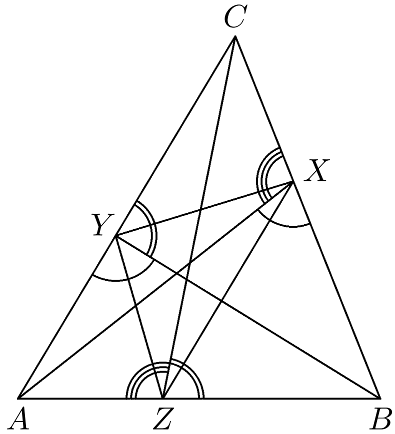
$$D = (4p)^2 - 4(5p^2 + 6p - 16) = -4p^2 - 24p + 64 = -4(p+8)(p-2),$$

sú také p práve čísla z intervalu $(-8, 2)$.

Odpoveď. Minimálna hodnota súčtu $x_1^2 + x_2^2$ (rovná 26) zodpovedá jedinému číslu $p = 1$.

2. *Vnútri strán BC, CA, AB daného ostrouhlého trojuholníka ABC sú po rade vybrané body X, Y a Z tak, že každému zo štvoruholníkov $ABXY$, $BCYZ$ a $CAZX$ sa dá opísať kružnica. Dokážte, že body X, Y, Z sú päty výšok trojuholníka ABC.* (E. Kováč)

Riešenie. V tetivovom štvoruholníku $ABXY$ označme $\varphi = |\measuredangle AXB| = |\measuredangle AYB|$ veľkosť oboch zhodných obvodových uhlov nad spoločnou tetivou AB (obr. 1). Podobne



Obr. 1

označme $\psi = |\measuredangle BZC| = |\measuredangle BYC|$ a $\omega = |\measuredangle CXA| = |\measuredangle CZA|$ veľkosti zhodných obvodových uhlov nad tetivami BC a CA v tetivových štvoruholníkoch $BCYZ$ a $CAZX$. Keď zapíšeme postupne rovnosti pre každú z troch dvojíc vyznačených susedných uhlov pri vrcholoch X, Y a Z, dostaneme pre neznáme veľkosti φ, ψ a ω sústavu troch lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} \varphi + \psi &= \pi, \\ \psi + \omega &= \pi, \\ \omega + \varphi &= \pi, \end{aligned}$$

ktorá má jediné riešenie $\varphi = \psi = \omega = \pi/2$, čo jednoducho zistíme napr. odčítaním ľubovoľných dvoch rovníc a dosadením. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

Poznámka. Ak sú naopak body X, Y a Z päty výšok trojuholníka ABC, sú štvoruholníky $ABXY$, $BCYZ$ a $CAZX$ tetivové podľa Tálesovej vety.

---

3. *Na tabuli sú napísané čísla* $1, 2, ..., 17$. *Čísla postupne zotierame, a to tak, že z doposiaľ nezotretých čísel zvolíme ľubovoľné číslo* k *a zotrieme všetky tie čísla na tabuli, ktoré delia číslo* $k+17$. *Dokážte, že opakovaním tejto procedúry sa nám nepodarí zotrieť všetky čísla.* (*J. Földes*)

Riešenie. Pretože pre zvolené číslo k vždy platí $18 \leqq k + 17 \leqq 34$ a medzi číslami $18, 19, \ldots, 34$ má každé z čísel $12, 13, \ldots, 17$ iba jeden násobok (konkrétne dvojnásobok), ľubovoľné číslo $m \in \{12, 13, \ldots, 17\}$ zotrieme iba pri voľbe jediného čísla k (pri ktorom $k + 17 = 2m$). Napríklad číslo 15 zotrieme iba voľbou $k = 13$, číslo 13 iba voľbou $k = 9$. Na zotretie oboch čísel 15 a 13 teda musíme niekedy vybrať $k = 13$ a niekedy neskôr $k = 9$. Potom ale v okamihu výberu čísla $k = 9$ je už zotreté ako číslo 10 (zotreli sme ho najneskôr pri výbere $k = 13$), tak číslo 1 (to sme zotreli hneď pri prvom výbere). Číslo $k + 17$ je deliteľné deviatimi iba pri výberoch $k = 1$ a $k = 10$, pri žiadnom ďalšom výbere už preto nezotrieme číslo 9. Dokázali sme, že opakovaním danej procedúry nemožno zotrieť všetky tri čísla 15, 13 a 9, tým skôr nemožno zotrieť všetky čísla od 1 do 17.

Iné riešenie. Pripusťme, že všetky čísla možno zotrieť po n výberoch čísla k (spojených so zotieraním všetkých deliteľov čísla $k+17$) a že každým výberom sa niečo zotrie (inak je taký výber zbytočný). Posledné o. i. znamená, že každé číslo je vybrané najviac raz. Zrejme $n > 1$ a pre posledné vybrané číslo k_n musí platiť $k_n | (k_n + 17)$, t. j. $k_n = 17$ (možnosť $k_n = 1$ je vylúčená tým, že číslo 1 je zotreté hneď pri prvom výbere). Pred posledným výberom sú na tabuli len delitele čísla 34, teda okrem čísla 17 prípadne číslo 2. Keby tam číslo 2 nebolo, muselo by opäť platiť $k_{n-1} \mid (k_{n-1} + 17)$, čo už možné nie je. Preto nutne $k_{n-1} = 2$. Taká voľba je ale zbytočná, pretože číslo $2+17$ je prvočíslo.