2001/2002
51. ročník MO *Riešenia úloh krajského kola kategórie B*

1. *Nájdite všetky prirodzené čísla n, ktoré sú menšie ako 100 a majú tú vlastnosť, že druhé mocniny čísel $7n+5$ a $4n+3$ sa končia rovnakým dvojčíslím.* (J. Šimša)

Riešenie. Pretože číslo $4n+3$ je nepárne, musí byť nepárne aj číslo $7n+5$, takže číslo n musí byť párne, t. j. $n=2k$ pre vhodné celé k.

Požadovanú vlastnosť možno vyjadriť aj tak, že rozdiel $D=(7n+5)^2-(4n+3)^2$ musí byť deliteľný číslom 100. S využitím rozkladu

$$D=\big((7n+5)-(4n+3)\big)\big((7n+5)+(4n+3)\big)=(3n+2)(11n+8)$$

po dosadení $n=2k$ dostaneme vyjadrenie $D=4(3k+1)(11k+4)$. Zaujíma nás teda, kedy je súčin $(3k+1)(11k+4)$ deliteľný číslom 25. Oba činitele $3k+1$ a $11k+4$ nemôžu byť násobky piatich súčasne, pretože pre ich najväčší spoločný deliteľ vychádza

$$\text{nsd}(11k+4,3k+1)=\text{nsd}(3k+1,2k+1)=\text{nsd}(2k+1,k)=\text{nsd}(k,1)=1.$$

Zistíme preto, kedy $25 \mid 3k+1$ a kedy $25 \mid 11k+4$. Z vyjadrenia

$$3k+1=3(k-8)+25 \quad \text{a} \quad 11k+4=11(k-11)+125$$

vidíme, že $25 \mid 3k+1$ práve vtedy, keď $k=25t+8$, zatiaľ čo $25 \mid 11k+4$, práve vtedy, keď $k=25t+11$ (písmeno t označuje v oboch prípadoch celé číslo). Hľadané čísla $n=2k$ sú preto čísla tvarov $n=50t+16$ a $n=50t+22$ v rozmedzí od 1 do 99, sú to teda práve čísla 16, 22, 66 a 72.

Iné riešenie. Najprv zistíme, aká je posledná číslica čísel $(7n+5)^2$ a $(4n+3)^2$ v závislosti na poslednej číslici čísla n.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$7n+5$	5	2	9	6	3	0	7	4	1	8
$(7n+5)^2$	5	4	**1**	6	9	0	**9**	6	1	4
$4n+3$	3	7	1	5	9	3	7	1	5	9
$(4n+3)^2$	9	9	**1**	5	1	9	**9**	1	5	1

(Výpočet celej tabuľky sa skráti na polovicu, keď si dopredu ako v predchádzajúcom riešení uvedomíme, že n musí byť párne.) Vidíme, že čísla $(7n+5)^2$ a $(4n+3)^2$ končia rovnakou číslicou práve vtedy, keď číslo n končí číslicou 2 alebo 6. Každé hľadané $n<$ <100 je teda buď tvaru $n=10a+2$, alebo tvaru $n=10a+6$, kde a je neznáma číslica. Aj keď by stačilo otestovať všetkých $2\cdot 10=20$ takých čísel n, zvolíme iný postup.

(i) Pre $n=10a+2$ platí

$$(7n+5)^2=(70a+19)^2=4\,900a^2+2\,660a+361,$$
$$(4n+3)^2=(40a+11)^2=1\,600a^2+880a+121.$$

Vidíme, že číslo $(7n+5)^2$ má na mieste desiatok rovnakú číslicu, akú má číslo $6a+6$ na mieste jednotiek; číslo $(4n+3)^2$ zasa má na mieste desiatok rovnakú číslicu, akú má číslo $8a+2$ na mieste jednotiek. Hľadáme teda číslice a, pre ktoré rozdiel $(8a+2) - (6a+6) = 2(a-2)$ končí číslicou nula; zrejme to platí iba pre $a = 2$ a $a = 7$, ktorým zodpovedajú riešenia $n = 22$ a $n = 72$.

(ii) Pre $n = 10a + 6$ platí

$$
\begin{aligned}
(7n+5)^2 &= (70a+47)^2 = 4\,900a^2 + 6\,580a + 2\,209\\
(4n+3)^2 &= (40a+27)^2 = 1\,600a^2 + 2\,160a + 729.
\end{aligned}
$$

Teraz sú počty desiatok v týchto číslach rovnaké ako počty jednotiek v číslach $8a$ a $6a+2$. Rozdiel $8a - (6a+2) = 2(a-1)$ končí číslicou nula len pre $a = 1$ a $a = 6$. Zodpovedajúce riešenia sú $n = 16$ a $n = 66$.

---

2. *V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc*

$$
\begin{aligned}
(x^2+1)(y^2+1) + 24xy &= 0\\
\frac{12x}{x^2+1} + \frac{12y}{y^2+1} + 1 &= 0.
\end{aligned}
$$

(*J. Šimša*)

Riešenie. Pretože pre ľubovoľné reálne čísla x, y sú obe čísla (x^2+1) a (y^2+1) nenulové (kladné), môžeme prejsť k novým neznámym

$$u = \frac{x}{x^2+1} \quad \text{a} \quad v = \frac{y}{y^2+1},$$

v ktorých má zrejme pôvodná sústava rovníc tvar

$$1 + 24uv = 0 \quad \text{a} \quad 12u + 12v + 1 = 0.$$

Odtiaľ napríklad pre neznámu u jednoducho dostaneme kvadratickú rovnicu

$$24u^2 + 2u - 1 = 0$$

s koreňmi $u_1 = 1/6$ a $u_2 = -1/4$, ktorým „symetricky“ zodpovedajú hodnoty $v_1 = -1/4$ a $v_2 = 1/6$. Pretože (kvadratické) rovnice

$$\frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{6} \quad \text{a} \quad \frac{t}{t^2+1} = -\frac{1}{4}$$

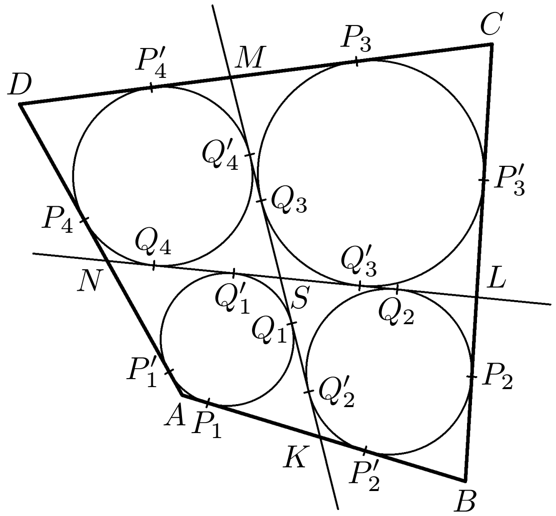
majú riešenie

$$s_{1,2} = 3 \pm \sqrt{8} \quad \text{a} \quad t_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3},$$

má pôvodná sústava práve osem riešení, a to dvojice tvaru $(x,y) = \big(3 \pm \sqrt{8}, -2 \pm \sqrt{3}\big)$ a $(x,y) = \big(-2 \pm \sqrt{3}, 3 \pm \sqrt{8}\big)$, kde znamienka sú kombinované ľubovoľne.

3. *Vo vnútri strán AB, BC, CD a DA konvexného štvoruholníka $ABCD$ sú postupne zvolené body K, L, M a N. Označme S priesečník priamok KM a LN. Ak je možné vpísať kružnice štvoruholníkom $AKSN$, $BLSK$, $CMSL$ a $DNSM$, potom je možné vpísať kružnicu aj štvoruholníku $ABCD$. Dokážte.* (*J. Zhouf*)

Riešenie. Predpokladajme, že uvedeným štyrom štvoruholníkom možno vpísať kružnice. Body dotykov týchto kružníc s príslušnými stranami štvoruholníkov označme ako



Obr. 1

na obr. 1. Zo súmernosti dotyčníc zostrojených z jedného bodu k rovnakej kružnici vyplývajú rovnosti

$$|AP_1| = |AP_1'|,\ |BP_2| = |BP_2'|,\ |CP_3| = |CP_3'|,\ |DP_4| = |DP_4'| \tag{1}$$

a

$$|SQ_1| = |SQ_1'|,\ |SQ_2| = |SQ_2'|,\ |SQ_3| = |SQ_3'|,\ |SQ_4| = |SQ_4'|. \tag{2}$$

Zo súmernosti spoločných vonkajších dotyčníc dvoch kružníc zasa vyplývajú rovnosti

$$\begin{aligned} |P_1P_2'| &= |Q_1'Q_2|,\ |P_2P_3'| = |Q_2'Q_3|,\\ |P_3P_4'| &= |Q_3'Q_4|,\ |P_4P_1'| = |Q_4'Q_1|. \end{aligned} \tag{3}$$

Podľa známeho tvrdenia možno konvexnému štvoruholníku $ABCD$ vpísať kružnicu práve vtedy, keď dĺžky jeho strán spĺňajú podmienku

$$|AB| + |CD| = |BC| + |DA|,$$

ktorú možno vzhľadom na (1) upraviť na tvar

$$|P_1P_2'| + |P_3P_4'| = |P_2P_3'| + |P_4P_1'|. \tag{4}$$

Všimnime si, že podľa (2) a (3) platia rovnosti

$$\begin{aligned}
|P_1P_2'| &= |Q_1'Q_2| = |Q_1'S| + |SQ_2| = |SQ_1| + |SQ_2|,\\
|P_2P_3'| &= |Q_2'Q_3| = |Q_2'S| + |SQ_3| = |SQ_2| + |SQ_3|,\\
|P_3P_4'| &= |Q_3'Q_4| = |Q_3'S| + |SQ_4| = |SQ_3| + |SQ_4|,\\
|P_4P_1'| &= |Q_4'Q_1| = |Q_4'S| + |SQ_1| = |SQ_4| + |SQ_1|.
\end{aligned}$$

Obe strany (4) sa teda rovnajú súčtu $|SQ_1| + |SQ_2| + |SQ_3| + |SQ_4|$ a dôkaz je hotový.

---

4. *Je daných n nezáporných čísel. Môžeme vybrať ľubovoľné dve z nich, napríklad a a b, $a \leqq b$, a zameniť ich číslami 0 a $b-a$. Dokážte, že opakovaním tejto operácie je možné všetky dané čísla zmeniť na nuly práve vtedy, keď pôvodné čísla je možné rozdeliť do dvoch skupín tak, že súčty čísel v oboch skupinách sú rovnaké.* (J. Földes)

Riešenie. Poznamenajme najskôr, že popísanú operáciu nemá zmysel robiť s dvojicou čísel (a, b) obsahujúcou číslo nula, lebo taká dvojica sa operáciou nezmení.

(i) Predpokladajme najskôr, že daná skupina n nezáporných čísel sa dá rozdeliť na dve podskupiny A a B s rovnakým súčtom čísel. Ukážme, že v takom prípade možno opakovaním operácie zmeniť všetky čísla oboch skupín A a B na nuly. Ak obsahuje niektorá zo skupín A, B aspoň jedno kladné číslo (inak sme hotoví), vyplýva z rovnosti súčtu čísel v oboch skupinách, že kladné číslo existuje v oboch z nich. Vyberme teda kladné číslo $a \in A$ a kladné číslo $b \in B$ a urobme operáciu práve s týmito dvoma číslami. Ak napríklad $a \leqq b$ (v prípade $a \geqq b$ je úvaha podobná), zmení sa číslo a v skupine A na nulu a číslo b v skupine B na číslo $b - a$, takže sa celkový súčet čísel v skupine A zmenší o a, rovnako ako celkový súčet čísel v skupine B. Preto budú po urobenej operácii súčty čísel v skupinách A a B opäť rovnaké, pritom sa celkový počet núl v $A \cup B$ zväčší o 1 (pokiaľ bolo $a \neq b$) alebo o 2 (pokiaľ bolo $a = b$). Opakovaním popísaného postupu s kladnými číslami $a \in A$ a $b \in B$ sa preto po konečnom počte krokov dostaneme do situácie, keď v žiadnej zo skupín A, B už nebude kladné číslo.

(ii) Predpokladajme teraz, že z danej n-tice nezáporných čísel sme dostali vhodným opakovaním operácie n-ticu zloženú zo samých núl. Dokážme indukciou, že pred urobením každej jednotlivej operácie bolo možné aktuálnu n-ticu čísel rozdeliť na dve podskupiny A a B s rovnakým súčtom. Pred prevedením poslednej operácie musela mať aktuálna n-tica čísel tvar $\{a, a, 0, 0, \ldots, 0\}$, takže vhodné rozdelenie bolo $A = \{a\}$ a $B = \{a, 0, 0, \ldots, 0\}$. Predpokladajme teraz, že po urobení niektorej operácie s číslami (a, b), $a \leqq b$, existovalo rozdelenie čísel do podskupín A a B s rovnakým súčtom a ukážme, že aj pred urobením tejto operácie také rozdelenie existovalo. Určite môžeme predpokladať, že nové čísla 0 a $b - a$ nepatria do rovnakej z oboch podskupín A a B (inak prehodíme číslo 0 do druhej podskupiny, čo nezmení súčty čísel v podskupinách), nech teda napríklad $0 \in A$ a $b - a \in B$. Potom číslo 0 v A zameníme číslom a a číslo $b - a$ v B zameníme číslom b; dostaneme tak vhodné rozdelenie aktuálnych čísel pred uvažovanou operáciou.