2001/2002
51. ročník MO *Riešenia úloh domáceho kola kategórie C*

---

1. *Dokážte, že existuje jediná číslica c, pre ktorú možno nájsť jediné prirodzené číslo n končiace číslicou c a majúce vlastnosť, že číslo $2n + 1$ je druhou mocninou prvočísla.* (*M. Koblížková*)

Riešenie. Nech (nepárne) číslo $2n+1$ je druhou mocninou prvočísla p, potom p je tiež nepárne. Zo vzťahu $p^2 = 2n+1$ vyplýva, že $n = (p^2-1)/2 = (p-1)(p+1)/2$. Zostavme tabuľku niekoľkých prvých nepárnych prvočísiel p a im zodpovedajúcich čísel n.

p	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43
n	4	12	24	60	84	144	180	264	420	480	684	840	924

Číslo n je zrejme párne, dokonca je (ako prezradzuje aj tabuľka pre niekoľko hodnôt p) deliteľné štyrmi. To vidno z toho, že súčin $(p-1)(p+1)$ dvoch po sebe idúcich párnych čísel je vždy deliteľný ôsmimi. Z tabuľky naviac vidíme, že sa medzi číslicami, ktorými n končí, viackrát vyskytujú číslice 0 a 4, iba raz číslica 2, nevyskytujú sa 6 a 8.

Pozrime sa, akou číslicou končí číslo n v závislosti od číslice a, ktorou končí číslo p. Ak $p = 10k + a$, kde k je celé nezáporné číslo a a nepárna číslica, tak pre jednotlivé možné a dostaneme:

- Ak $a = 1$, tak $n = 10k(5k + 1)$, takže číslo n končí číslicou 0.
- Ak $a = 3$, tak $n = 10k(5k + 4) + 4$, takže číslo n končí číslicou 4.
- Ak $a = 5$, tak $n = 10(5k^2 + 5k + 1) + 2$, takže číslo n končí číslicou 2.
- Ak $a = 7$, tak $n = 10(5k^2 + 7k + 2) + 4$, takže číslo n končí číslicou 4.
- Ak $a = 9$, tak $n = 10(k + 1)(5k + 4)$, takže číslo n končí číslicou 0.

Ak je $2n+1$ druhou mocninou nepárneho prvočísla (nepárneho čísla), môže číslo n končiť iba číslicami 0, 2, 4. Jediným kandidátom na hľadanú číslicu tak zostáva 2.

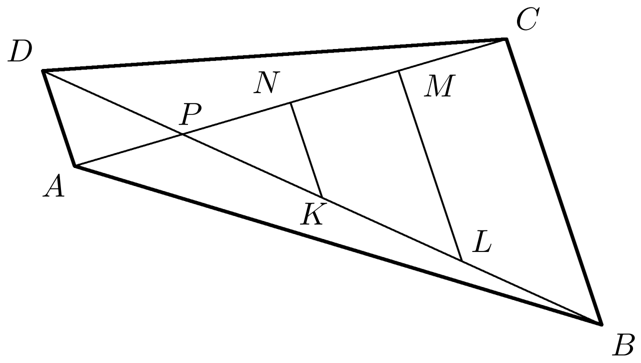
Pokiaľ $2n + 1$ je druhou mocninou prvočísla a n končí číslicou 2, prvočíslo p sa dá vyjadriť v tvare $10k + 5 = 5(2k + 1)$, je teda deliteľné piatimi. Jediné prvočíslo, ktoré je deliteľné piatimi, je číslo 5.

Hľadanou číslicou je teda $c = 2$; pre ňu existuje jediné prirodzené číslo $n = 12$, ktoré končí číslicou c, pričom $2n + 1$ je druhou mocninou prvočísla.

---

2. *V štvoruholníku $ABCD$ sa uhlopriečky pretínajú v bode P, uhlopriečka AC je rozdelená bodmi P, N a M na štyri zhodné úseky ($|AP| = |PN| = |NM| = |MC|$) a uhlopriečka BD je rozdelená bodmi L, K a P na štyri zhodné úseky ($|BL| = |LK| = |KP| = |PD|$). Určte pomer obsahov štvoruholníkov $KLMN$ a $ABCD$.* (*J. Zhouf*)

Riešenie. Trojuholníky APD a NPK sú súmerne združené podľa stredu P (obr. 1), AD a NK sú preto rovnobežné a $|AD| = |NK|$. Z rovnosti príslušných úsečiek ďalej vyplýva, že trojuholníky KNP, LMP a BCP sú podobné, preto $NK \parallel ML \parallel BC$ a naviac $|LM| = 2|KN|$ a $|BC| = 3|KN|$. Ak označíme s obsah trojuholníka APD, je obsah trojuholníka NKP rovný s a obsah trojuholníka MLP je $4s$ (má dvakrát väčšiu výšku z vrcholu P ako trojuholník NKP z rovnakého vrcholu a jeho strana ML je dvakrát väčšia ako strana NK). Obsah lichobežníka $KLMN$ je preto $3s$.



Obr. 1

Strana AP trojuholníka APD je štyrikrát menšia ako strana AC trojuholníka ACD, výšky z vrcholu D sú v oboch trojuholníkoch rovnaké, preto je obsah trojuholníka ACD rovný $4s$. Strana PN trojuholníka PNK je štyrikrát menšia ako strana AC trojuholníka ACB, zatiaľ čo výška trojuholníka PNK z vrcholu K je trikrát menšia ako výška trojuholníka ABC z vrcholu B, preto je obsah trojuholníka ACB rovný $12s$. Obsah štvoruholníka $ABCD$ je rovný súčtu obsahov trojuholníkov ABC a ACD, teda $16s$.

Pomer obsahov štvoruholníkov $KLMN$ a $ABCD$ je rovný $3 : 16$.

---

3. *Určte všetky dvojice (x, y) celých čísel, ktoré sú riešením nerovnice*

$$\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{6}{y\sqrt{x}} < \frac{5\sqrt{y}}{y}.$$

(*J. Zhouf*)

Riešenie. Zo zadania vyplýva, že x a y sú nutne prirodzené čísla. Vynásobením oboch strán nerovnice kladným číslom $y\sqrt{x}$ prejdeme k ekvivalentnej nerovnici

$$xy + 6 < 5\sqrt{xy}.$$

Jej úpravou dostaneme

$$(\sqrt{xy} - 3)(\sqrt{xy} - 2) < 0,$$

čo platí práve vtedy, keď $2 < \sqrt{xy} < 3$, čiže $4/x < y < 9/x$.

Pretože x a y sú prirodzené čísla, z poslednej nerovnosti vyplýva, že stačí uvažovať iba $x < 9$. Ľahko potom určíme všetky dvojice (x, y) celých čísel, ktoré sú riešením poslednej nerovnice, a teda aj danej nerovnice, ktorá je s ňou ekvivalentná: $(1, 5)$, $(1, 6)$, $(1, 7)$, $(1, 8)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 2)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$, $(6, 1)$, $(7, 1)$, a $(8, 1)$.

---

4. *Jožko sa vracal z výletu. Najprv cestoval vlakom a potom pokračoval zo zastávky na bicykli. Celá cesta mu trvala presne 1 hodinu 30 minút a prešiel pri nej vzdialenosť 60 km. Vlak išiel priemernou rýchlosťou 50 km/h. Určte, ako dlho išiel Jožko na bicykli, keď jeho rýchlosť v km/h je vyjadrená prirodzeným číslom rovnako ako vzdialenosť meraná v km, ktorú prešiel na bicykli.* (*E. Kováč*)

Riešenie. Označme v vzdialenosť v kilometroch, ktorú Jožko prešiel na bicykli a r jeho rýchlosť v km/h. Podľa zadania sú r a v prirodzené čísla a $v < 60$. Čas, ktorý cestoval Jožko na bicykli, bol v/r hodín. Vlakom prešiel vzdialenosť $(60 - v)$ km a túto vzdialenosť prešiel za $(60 - v)/50$ hodín. Preto podľa zadania platí

$$\frac{60 - v}{50} + \frac{v}{r} = \frac{3}{2}.$$

Táto rovnica je ekvivalentná s rovnicou

$$50v - 15r - rv = 0,$$

ktorú ešte upravíme na tvar

$$(50 - r)(v + 15) = 15 \cdot 50 = 2 \cdot 3 \cdot 5^3.$$

Odtiaľ vyplýva, že $50 - r$ je prirodzené číslo menšie ako 50 a $v + 15$ je prirodzené číslo väčšie ako 15, ktoré neprevyšuje 75, a naviac, že súčin $(50 - r)(v + 15)$ je deliteľný číslom 5^3. Môžu nastať štyri prípady.

- $5^3 \mid 50 - r$. To nie je možné, pretože $1 \leqq 50 - r < 50$.
- $5^2 \mid 50 - r$ a $5 \mid v + 15$. Číslo $50 - r$ je preto rovné 25, odtiaľ $r = 25$ a $v = 15$.
- $5 \mid 50 - r$ a $5^2 \mid v + 15$. Číslo $v + 15$ je teda prvkom množiny $\{25, 50\}$, odtiaľ dopočítame ďalšie dve možnosti $r = 20$, $v = 10$ a $r = 35$, $v = 35$.
- $5^3 \mid v + 15$. To nie je možné, pretože $15 < v + 15 < 75$.

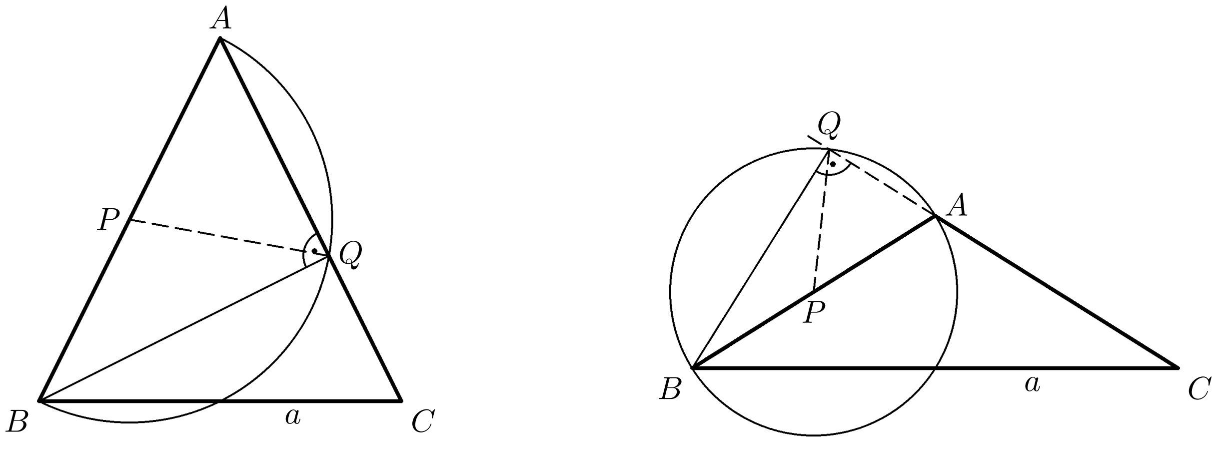
Možné časy Jožkovej jazdy na bicykli (v minútach) sú preto $15 \cdot 60/25 = 36$, $10 \cdot 60/20 = 30$ a $35 \cdot 60/35 = 60$.

Výpisom všetkých možností sme zistili, že pokiaľ Jožko cestoval podľa zadania úlohy, tak išiel na bicykli buď 30, alebo 36, alebo 60 minút.

---

5. *Zostrojte rovnoramenný trojuholník ABC so základňou BC danej dĺžky a, ak je daný stred P strany AB a bod Q ($Q \neq P$), ktorý je pätou výšky z vrcholu B.* (J. Švrček)

Riešenie. Uhol BQA je buď pravý, alebo $Q = A$. Preto bod Q leží na Tálesovej kružnici zostrojenej nad priemerom BA. (Na obr. 2 je znázornený prípad ostrouhlého aj tupouhlého trojuholníka ABC.) Pretože P je stred úsečky AB, $|PQ|$ je veľkosť polomeru tejto kružnice, preto veľkosť priemeru $|AB|$ tejto kružnice je rovná $2|PQ|$. Trojuholník ABC má dĺžku ramena $2|PQ|$, a pretože poznáme veľkosť základne, je tým jednoznačne určený.



Obr. 2

Odtiaľ už vyplýva *konštrukcia*. Najskôr zostrojíme trojuholník $A'B'C'$ zhodný s trojuholníkom ABC s veľkosťami strán $|A'B'| = |A'C'| = 2|PQ|$ a $|B'C'| = a$, ktorý potom premiestnime tak, aby sa stred strany $A'B'$ zobrazil na bod P a päta výšky z vrcholu B' na bod Q. To možno urobiť jednoznačne až na osovú súmernosť podľa priamky PQ. Pokiaľ teda trojuholník $A'B'C'$ existuje, má úloha dve riešenia súmerne združené podľa osi PQ.

Diskusia je zrejmá. Trojuholník ABC možno zostrojiť práve vtedy, keď možno zostrojiť rovnoramenný trojuholník $A'B'C'$, t. j. keď $a < 4|PQ|$ (trojuholníkové nerovnosti), v tomto prípade má úloha práve dve (zhodné) riešenia. Naviac pre $a < 2\sqrt{2}|PQ|$ bude trojuholník ABC ostrouhlý, pre $a = 2\sqrt{2}|PQ|$ pravouhlý a pre $2\sqrt{2}|PQ| < a < 4|PQ|$ tupouhlý. *Dôkaz správnosti* vyplýva z rozboru úlohy.

Iné riešenie. Označme R stred strany BC, ten je súčasne pätou výšky z vrcholu A. Oba body Q a R teda ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom AB so stredom P, preto $|PQ| = |PR| = |AB|/2$. Nakoľko uhol BQC je pravý, leží bod Q na Tálesovej kružnici nad priemerom BC so stredom R, takže $|RQ| = |BC|/2 = a/2$. Trojuholník PQR je preto podobný s trojuholníkom ABC (koeficient podobnosti je 1/2).

Pri *konštrukcii* najskôr zostrojíme trojuholník PQR. Na priamke rovnobežnej so strednou priečkou PR prechádzajúcej bodom Q nájdeme bod $C \neq Q$ tak, aby $|RC| = a/2$. Body A a B potom už zostrojíme jednoducho.

Pre dané body P, Q môžeme zostrojiť tretí vrchol R trojuholníka PQR dvoma spôsobmi. *Diskusia* je teda rovnaká ako v predchádzajúcom riešení. *Dôkaz správnosti* vyplýva z rozboru úlohy.

---

6. *Istý panovník pozval na oslavu svojich narodenín 28 rytierov. Každý z rytierov mal medzi ostatnými práve troch nepriateľov.*

a) Ukážte, že panovník môže rytierov rozsadiť k dvom stolom tak, aby každý rytier sedel pri rovnakom stole najviac s jedným nepriateľom.

b) Ukážte, že v prípade ľubovoľného takéhoto rozsadenia sedí pri každom stole najviac 16 rytierov.

(Nepriateľstvo je vzájomný vzťah: Ak A je nepriateľom B, tak aj B je nepriateľom A.)

(J. Šimša)

Riešenie. a) Rozsaďme v prvom kole rytierov ku stolom ľubovoľným spôsobom. Označme n_1 počet nepriateľov prvého rytiera pri stole, pri ktorom sedí, potom $n_1 \leqq 3$. Podobne označme $n_2 \leqq 3$ počet nepriateľov druhého rytiera pri stole, pri ktorom sedí, atď. Potom pre „hladinu nepriateľstva“

$$N_1 = n_1 + n_2 + \ldots + n_{28}$$

v prvom kole platí $0 \leqq N_1 \leqq 3 \cdot 28 = 54$, pričom N_1 je celé nezáporné číslo.

Predpokladajme, že existuje rytier, ktorý sedí pri stole s aspoň dvoma nepriateľmi. Potom ho presadíme k druhému stolu. Tým vznikne nové rozsadenie. Skúmajme teraz hladinu nepriateľstva N_2 po tomto druhom kole.

Pokiaľ presadený rytier r sedel pôvodne pri jednom stole so všetkými tromi nepriateľmi a, b, c, po jeho presadení sa počet nepriateľov rytiera r pri stole, pri ktorom teraz sedí, znížil o 3 na nulu, a počet nepriateľov rytierov a, b a c pri ich stole sa znížil o jedna. Počty nepriateľov ostatných rytierov pri ich stoloch sa nezmenili. Teda $N_2 = N_1 - 6$.

Pokiaľ presadený rytier r sedel pôvodne pri jednom stole s dvoma nepriateľmi a a b a bol presadený ku stolu s nepriateľom c, po jeho presadení sa počet nepriateľov rytiera r pri stole, pri ktorom teraz sedí, znížil o jedna z dvoch na jedného, počet nepriateľov rytierov a a b pri ich stoloch sa o jedna znížil, a počet nepriateľov rytiera c pri stole, pri ktorom sedí, sa zvýšil o jedna. Počty nepriateľov ostatných rytierov pri ich stoloch sa nezmenili. V tomto prípade teda $N_2 = N_1 - 2$.

V oboch prípadoch vychádza $N_2 < N_1$.

Pokiaľ ešte po tomto kole existuje rytier, ktorý sedí pri jednom stole s aspoň dvoma svojimi nepriateľmi, opäť ho požiadame, aby si presadol k druhému stolu. Pre hladinu nepriateľstva N_3 po treťom kole bude z rovnakých dôvodov ako skôr platiť $N_3 < N_2$.

Rovnakým spôsobom vytvoríme hladiny nepriateľstva $N_4 > N_5 > \cdots$ po ďalších kolách.

Pretože v každom kole je hladina nepriateľstva menšia ako v predchádzajúcom kole, je vyjadrená celým nezáporným číslom a hladina nepriateľstva v prvom kole je najviac 54, môže sa taká situácia opakovať najviac päťdesiatštyrikrát. Počet kôl musí byť teda konečný a po poslednom kole už neexistuje rytier, ktorý by sedel pri jednom stole s aspoň dvoma nepriateľmi. Tým sme dokázali časť a).

b) Predpokladajme, že rytieri sú teraz rozsadení pri stoloch A a B tak, že každý sedí pri rovnakom stole s najviac jedným nepriateľom. Označme r_A počet rytierov pri stole A a r_B počet rytierov pri stole B. Platí

$$r_A + r_B = 28. \tag{1}$$

Každý z rytierov pri stole A má pri stole B aspoň dvoch nepriateľov a každý z rytierov pri stole B je nepriateľom najviac troch rytierov od stola A, preto pre počet p tých nepriateľských dvojíc, ktoré sedia pri rôznych stoloch, platí

$$2r_A \leqq p \quad \text{a} \quad p \leqq 3r_B, \quad \text{takže } 2r_A \leqq 3r_B.$$

Keď dosadíme do tejto nerovnice z (1) $r_B = 28 - r_A$, dostaneme po úprave $5r_A \leqq 84$. Vzhľadom na to, že r_A je celé nezáporné číslo, musí platiť $r_A \leqq 16$. Vzhľadom na symetriu situácie platí analogicky $r_B \leqq 16$. Tým sme splnili časť b).

V časti b) môžeme postupovať aj sporom. Keby pri stole A sedelo aspoň 17 rytierov, mali by spolu pri stole B aspoň $17 \cdot 2 = 34$ nepriateľov, pritom každý rytier-nepriateľ je v tomto čísle započítaný najviac trikrát. Pretože $3 \cdot 11 < 34$, sedí pri stole B aspoň 12 rytierov, spolu pri oboch stoloch A a B je potom aspoň $17 + 12 = 29$ rytierov, čo odporuje zadaniu.