2008/2009
58. ročník MO *Riešenia úloh domáceho kola kategórie A*

1. *V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc*

$$\begin{aligned} 2\sin x\cos(x+y)+\sin y&=1,\\ 2\sin y\cos(y+x)+\sin x&=1. \end{aligned}$$

(Jaroslav Švrček)

Riešenie. Použitím známych vzorcov

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y,\quad \sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=1-2\sin^2 x$$

dostaneme úpravou ľavej strany prvej rovnice

$$\begin{aligned} 2\sin x\cos(x+y)+\sin y&=2\sin x(\cos x\cos y-\sin x\sin y)+\sin y=\\ &=2\sin x\cos x\cos y+(1-2\sin^2 x)\sin y=\\ &=\sin 2x\cos y+\cos 2x\sin y=\\ &=\sin(2x+y). \end{aligned}$$

Podobne ľavá strana druhej rovnice je rovná $\sin(2y+x)$. Zadaná sústava je teda ekvivalentná so sústavou

$$\begin{aligned} \sin(2x+y)&=1,\\ \sin(2y+x)&=1. \end{aligned}\tag{1}$$

Keďže funkcia sínus nadobúda hodnotu 1 práve v bodoch tvaru $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, kde k je celé číslo, budú riešením sústavy práve tie dvojice (x,y), pre ktoré existujú celé čísla k, l také, že

$$2x+y=\tfrac{\pi}{2}+2k\pi,\quad 2y+x=\tfrac{\pi}{2}+2l\pi.\tag{2}$$

Odtiaľ buď odčítaním vhodných násobkov rovníc alebo priamym vyjadrením jednej premennej z prvej rovnice a dosadením do druhej rovnice po úprave dostaneme

$$x=\tfrac{\pi}{6}+(4k-2l)\tfrac{\pi}{3},\quad y=\tfrac{\pi}{6}+(4l-2k)\tfrac{\pi}{3}.$$

Riešením sústavy sú teda dvojice $\left(\frac{\pi}{6}+(4k-2l)\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}+(4l-2k)\frac{\pi}{3}\right)$, kde k, l sú ľubovoľné celé čísla. Nie je nutné robiť skúšku, nakoľko z postupu vyplýva, že takéto dvojice (x,y) spĺňajú vzťahy (2) a teda aj sústavu (1).

Poznámka. Uvedený výsledok možno zapísať aj v inom tvare. Keďže $x-y=(6k-6l)\frac{\pi}{3}=2\pi(k-l)$, možno pri položení $m=k-l$, $n=2k-l$ písať $x=\frac{\pi}{6}+n\frac{2\pi}{3}$, $y=x-2\pi m$, teda riešením sú dvojice $\left(\frac{\pi}{6}+n\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{6}+n\frac{2\pi}{3}-2\pi m\right)$, kde m, n sú ľubovoľné celé čísla. (Keď k, l prebiehajú všetky možné dvojice celých čísel, tak aj m, n prebehnú všetky možné dvojice celých čísel.)

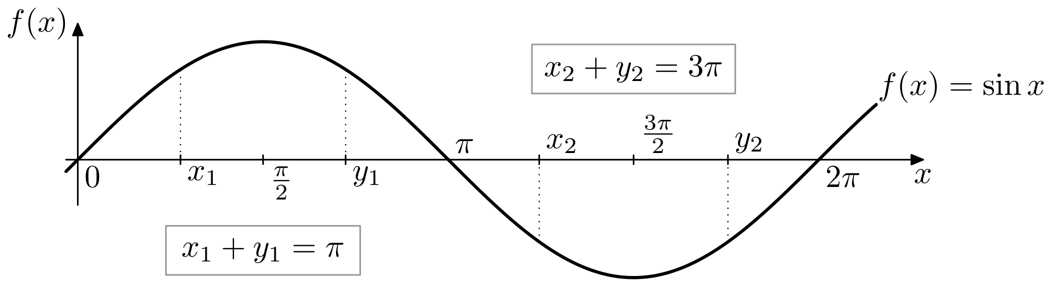
Iné riešenie. Zrejme ak je riešením zadanej sústavy dvojica (x,y), sú vďaka periodickosti funkcií sínus a kosínus s periódou 2π riešením aj všetky dvojice $(x+2k\pi,y+2l\pi)$. Budeme teda sústavu riešiť v obore $\langle 0,2\pi)$ a na konci nájdené riešenia „posunieme“ o $(2k\pi,2l\pi)$, aby sme získali všeobecné riešenie.

Odčítaním rovníc sústavy získame po rozklade ľavej strany na súčin rovnicu

$$(\sin x - \sin y)\bigl(2\cos(x+y) - 1\bigr) = 0.$$

Rozlíšime dva prípady podľa toho, ktorý z činiteľov je nulový.

I. Ak $\sin x = \sin y$, tak vzhľadom na podmienku $x, y \in \langle 0, 2\pi)$ máme tri možnosti: buď $x = y$, alebo $x + y = \pi$, alebo $x + y = 3\pi$ (obr. 1).



Obr. 1

Pri prvej možnosti po dosadení do pôvodnej sústavy získame jedinú rovnicu

$$2\sin x \cos 2x + \sin x = 1.$$

Z nej s využitím vzorca $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ a po substitúcii $\sin x = t$ ekvivalentnými úpravami postupne dostaneme

$$\begin{aligned}
2\sin x(1 - 2\sin^2 x) + \sin x &= 1,\\
2t(1 - 2t^2) + t &= 1,\\
4t^3 - 3t + 1 &= 0,\\
(t+1)(2t-1)^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Pri poslednej úprave sme „uhádli“ koreň $t = -1$ a rozklad na súčin získali vydelením mnohočlena $4t^3 - 3t + 1$ koreňovým činiteľom $t + 1$. Vzhľadom na použitú substitúciu $t = \sin x$ sú riešením ostatnej rovnice tie $x \in \langle 0, 2\pi)$, pre ktoré buď $\sin x = -1$, alebo $\sin x = \frac{1}{2}$, čiže $x \in \{\pi/6, 5\pi/6, 3\pi/2\}$. V skúmanom obore teda dostávame ako riešenia zadanej sústavy dvojice $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$, $(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ a $(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

Pri druhej a tretej možnosti, t. j. keď $x + y = \pi$ alebo $x + y = 3\pi$, máme $\cos(x + y) = -1$. Dosadením do pôvodnej sústavy (s využitím rovnosti $\sin x = \sin y$) získame jedinú rovnicu $2\sin x \cdot (-1) + \sin x = 1$. Preto $\sin x = -1$, a teda aj $\sin y = -1$. Odtiaľ získame v skúmanom obore jediné riešenie $x = y = \frac{3\pi}{2}$, ktoré sme našli aj pri prvej možnosti.

II. Ak $2\cos(x + y) - 1 = 0$, čiže $\cos(x + y) = \frac{1}{2}$, tak $x + y = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ pre nejaké celé k a niektoré znamienko. Po dosadení do pôvodnej sústavy dostaneme jedinú rovnicu $\sin x + \sin y = 1$, ktorá prejde na tvar $\sin x + \sin(\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi - x) = 1$. Vďaka periodickosti funkcie sínus s periódou 2π a použitím známeho vzorca

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

môžeme ľavú stranu upraviť na tvar

$$\sin x + \sin(\pm\tfrac{\pi}{3} + 2k\pi - x) = \sin x + \sin(\pm\tfrac{\pi}{3} - x) = 2\sin(\pm\tfrac{\pi}{6})\cos(x \mp \tfrac{\pi}{6}) = \\ = 2\cdot(\pm\tfrac{1}{2})\cos(x \mp \tfrac{\pi}{6}) = \pm\cos(x \mp \tfrac{\pi}{6}).$$

Riešená rovnica je teda ekvivalentná s rovnicou $\pm\cos(x \mp \frac{\pi}{6}) = 1$.

Pre „horné“ znamienko dostávame $\cos(x - \frac{\pi}{6}) = 1$, čomu v obore $\langle 0, 2\pi)$ vyhovuje iba $x = \frac{\pi}{6}$. Odtiaľ $y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi - x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, čomu v skúmanom obore vyhovuje iba $y = \frac{\pi}{6}$. Pre „dolné“ znamienko máme $\cos(x + \frac{\pi}{6}) = -1$, čomu v skúmanom obore vyhovuje iba $x = \frac{5\pi}{6}$. Odtiaľ $y = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi - x = 2k\pi - \frac{7\pi}{6}$, čomu v skúmanom obore vyhovuje iba $y = \frac{5\pi}{6}$. Dostávame tak len riešenia, ktoré sme objavili aj v prvom prípade.

Záver. Riešením v obore $\langle 0, 2\pi)$ sú dvojice $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$, $(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$, $(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. V obore reálnych čísel sú to potom dvojice

$$(\tfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \tfrac{\pi}{6} + 2l\pi), \quad (\tfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, \tfrac{5\pi}{6} + 2l\pi), \quad (\tfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, \tfrac{3\pi}{2} + 2l\pi),$$

kde k, l sú ľubovoľné celé čísla.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte platnosť známych súčtových vzorcov

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b, \qquad \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b.$$

[Prvý vzorec možno dokázať napr. vhodným použitím kosínusovej vety pre trojuholník, ktorého dva vrcholy ležia na jednotkovej kružnici a tretí vrchol je jej stredom. Druhý vzorec sa dá ľahko odvodiť z prvého.]

D1. V obore reálnych čísel vyriešte rovnicu

$$1 + \sin\frac{x+\pi}{5}\cdot\sin\frac{x-\pi}{11} = 0.$$

[55–A–S–3]

D2. Dokážte, že $\cos 36° = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. [Ak $\alpha = 36°$, tak $\sin 2\alpha = \sin 3\alpha$, lebo $2\alpha + 3\alpha = 180°$. Keďže $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ a

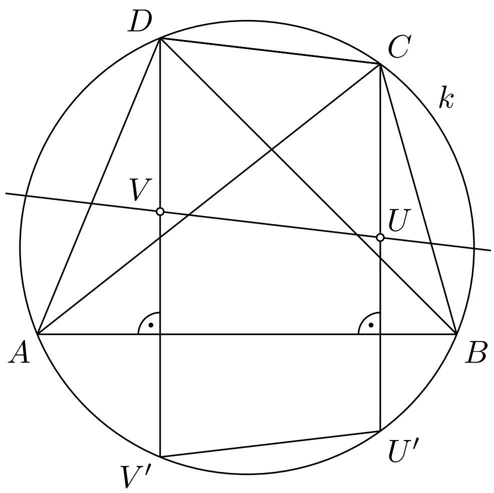
$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha = \\ = 2\sin\alpha\cos^2\alpha + (2\cos^2\alpha - 1)\sin\alpha = \sin\alpha(4\cos^2\alpha - 1),$$

dostávame $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin\alpha(4\cos^2\alpha - 1)$. Po vydelení nenulovým $\sin\alpha$ máme $4\cos^2\alpha - 2\cos\alpha - 1 = 0$. Číslo $t = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ je jediným kladným riešením kvadratickej rovnice $4t^2 - 2t - 1 = 0$.]

---

2. *Daný je tetivový štvoruholník $ABCD$. Dokážte, že spojnica priesečníkov výšok trojuholníka ABC s priesečníkom výšok trojuholníka ABD je rovnobežná s priamkou CD.* (*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Označme k kružnicu opísanú štvoruholníku $ABCD$. Nech priesečníky výšok trojuholníkov ABC a ABD sú postupne U a V (obr. 2).



Obr. 2

Niekoľko známych vlastností priesečníka výšok v súvislosti s opísanou kružnicou je zachytených v návodných a doplňajúcich úlohách. V našej situácii sa nám bude hodiť, že obraz U' bodu U v osovej súmernosti podľa strany AB leží na kružnici k, ktorá je opísanou kružnicou trojuholníka ABC. (Toto platí aj pre tupouhlý trojuholník ABC.) Podobne leží na kružnici k aj obraz V' bodu V v osovej súmernosti podľa strany AB.

Predpokladajme, že trojuholníky ABC a ABD sú ostrouhlé. Potom body U a V ležia v polrovine ABC. Priamky CU' a DV' sú rovnobežné, preto štvoruholník $CU'V'D$ je tetivový lichobežník, a teda je to lichobežník rovnoramenný. Z tohto a z vlastností osovej súmernosti dostávame rovnosti

$$|\measuredangle CDV'| = |\measuredangle U'V'D| = |\measuredangle UVV'|.$$

Keďže body C a U ležia v rovnakej polrovine vzhľadom na priamku $V'D$, sú priamky CD a UV rovnobežné, ako sme mali dokázať. (V poslednej úvahe sme využili, že body D, V, V' ležia na priamke v tomto poradí.)

V prípade, keď aspoň jeden z trojuholníkov ABC a ABD je tupouhlý, je argumentácia veľmi podobná. Body C, D, V', U' vždy vytvoria rovnoramenný lichobežník, aj keď na jeho obvode môžu ležať v inom poradí.

Iné riešenie. Nech U je priesečník výšok trojuholníka ABC. Ukážeme, že dĺžka úsečky CU nezávisí od polohy bodu C na oblúku AB kružnice k opísanej trojuholníku ABC.

Budeme používať štandardné označenie pre veľkosti strán a uhlov v trojuholníku ABC. Označme navyše K pätu výšky z vrcholu A na stranu BC. Predpokladajme najskôr, že trojuholník ABC je ostrouhlý. Jednoduchým výpočtom z vhodných trojuholníkov zistíme, že $|\measuredangle CUK| = \beta$. Využitím goniometrických funkcií v trojuholníkoch AKC a UKC dostaneme

$$|CU| = \frac{|CK|}{\sin|\measuredangle CUK|} = \frac{b\cos\gamma}{\sin\beta} = \frac{c\cos\gamma}{\sin\gamma},$$

posledná rovnosť vyplýva zo sínusovej vety v trojuholníku ABC. Analogickým spôsobom možno ukázať, že aj v prípade, keď ABC je tupouhlý trojuholník, platí $|CU| = c|\cos\gamma|/\sin\gamma$. Dĺžka úsečky CU teda závisí len od dĺžky úsečky AB a od veľkosti obvodového uhla ACB. V našom prípade je úsečka AB aj oblúk kružnice pevný, preto sa dĺžka úsečky CU nemení.

Body C a D ležia na tom istom oblúku kružnice k určenom úsečkou AB. Preto sú úsečky CU a DV rovnako dlhé. Navyše sú rovnobežné, čiže štvoruholník $CDVU$ je rovnobežník. A teda priamky CD a VU sú rovnobežné.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s priesečníkom výšok V a opísanou kružnicou k. Dokážte, že obraz V' bodu V v osovej súmernosti podľa priamky AB leží na kružnici k. Majú túto vlastnosť aj tupouhlé trojuholníky? [Stačí vyjadriť veľkosť uhla AVB z trojuholníka AVB, v ktorom zvyšné dva uhly dopočítame z vhodných pravouhlých trojuholníkov. Tento uhol má veľkosť $180° - |\measuredangle ACB|$, z čoho vyplýva, že štvoruholník $ACBV'$ je tetivový. Obraz priesečníka výšok v osovej súmernosti podľa strany leží na opísanej kružnici aj v prípade, že trojuholník je tupouhlý. Dôkaz sa spraví podobne vypočítaním veľkostí vhodných uhlov.]

N2. Nech V je priesečník výšok ostrouhlého trojuholníka ABC. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom ABV, BCV, CAV sú zhodné a porovnajte ich polomer s polomerom kružnice opísanej trojuholníku ABC. [Všetky tri kružnice sú obrazom kružnice opísanej trojuholníku ABC v osovej súmernosti podľa príslušnej strany. Je to priamym dôsledkom predchádzajúcej návodnej úlohy.]

N3. Daný je trojuholník ABC s ortocentrom H. Vyjadrite veľkosť úsečky CH pomocou dĺžok strán a veľkostí uhlov trojuholníka ABC. Snažte sa, aby vaše vyjadrenie bolo čo najjednoduchšie. [Pozri druhé uvedené riešenie súťažnej úlohy. Možných postupov aj vyjadrení je viacero.]

D1. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s priesečníkom výšok V a opísanou kružnicou k. Dokážte, že obraz bodu V v stredovej súmernosti podľa stredu úsečky AB leží na kružnici k. Majú túto vlastnosť aj tupouhlé trojuholníky?

D2. V rovine sú dané tri navzájom rôzne zhodné kružnice so spoločným bodom H. Druhé priesečníky dvojíc týchto kružníc (rôzne od bodu H) označíme A, B, C. Dokážte, že bod H je priesečníkom výšok trojuholníka ABC.

D3. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC s pätami výšok D, E, F ležiacimi postupne na stranách AB, BC, CA. Obraz bodu F v stredovej súmernosti podľa stredu strany AB leží na priamke DE. Určte veľkosť uhla BAC. [57–A–II–3]

D4. Daný je trojuholník ABC. Dokážte, že os uhla ACB a os strany AB sa pretínajú na kružnici opísanej trojuholníku ABC.

D5. V tetivovom štvoruholníku $ABCD$ označme L, M stredy kružníc vpísaných postupne do trojuholníkov BCA, BCD. Ďalej označme R priesečník kolmíc vedených z bodov L a M postupne na priamky AC a BD. Dokážte, že trojuholník LMR je rovnoramenný. [56–A–III–2]

D6. Na kružnici s polomerom r leží 5 rôznych bodov A, B, C, D, E v tomto poradí, pričom platí $|AC| = |BD| = |CE| = r$. Dokážte, že trojuholník, ktorého vrcholmi sú ortocentrá trojuholníkov ACD, BCD a BCE, je pravouhlý. [C-P-S trojstretnutie 2006/1]

D7. Dokážte, že všetky stredy strán a päty výšok v ľubovoľnom trojuholníku ležia na jednej kružnici. (Táto kružnica je známa pod názvom *Feuerbachova kružnica* alebo kružnica deviatich bodov – okrem spomínaných šiestich bodov na nej totiž ešte ležia stredy úsečiek spájajúcich priesečník výšok s jednotlivými vrcholmi trojuholníka.)

D8. Nech ABC je trojuholník a P bod v jeho rovine. Označme D, E, F päty kolmíc z bodu P na priamky AB, BC, CA. Dokážte, že ak bod P leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC, tak body D, E, F ležia na priamke. (Táto priamka sa nazýva *Simsonovou priamkou* bodu P.) Má takúto vlastnosť aj nejaký bod P ležiaci mimo kružnice opísanej trojuholníku ABC?

D9. Nech P je bod na kružnici opísanej trojuholníku ABC. Označme H priesečník výšok trojuholníka ABC. Nech X je priesečník Simsonovej priamky bodu P s úsečkou PH. Dokážte, že X je stredom úsečky PH a leží na Feuerbachovej kružnici trojuholníka ABC. (Riešenie tejto náročnej úlohy je možné nájsť na stránke `http://mathforum.org/library/drmath/view/61688.html`.)

D10. Nech PQ je ľubovoľný priemer kružnice opísanej trojuholníku ABC. Dokážte, že Simsonove priamky bodov P a Q sú na seba kolmé a pretínajú sa na Feuerbachovej kružnici trojuholníka ABC. (Druhá časť tejto úlohy je naozaj náročná.)

3. *Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel x, y také, že $\dfrac{xy^2}{x+y}$ je prvočíslo.*

(*Ján Mazák*)

Riešenie. Predpokladajme, že prirodzené čísla x, y vyhovujú zadaniu, t. j.

$$\frac{xy^2}{x+y} = p, \tag{1}$$

pričom p je prvočíslo. Označme d najväčšieho spoločného deliteľa čísel x, y. Potom $x = da$, $y = db$, pričom prirodzené čísla a, b už nemajú žiadneho spoločného deliteľa väčšieho ako 1, teda sú nesúdeliteľné. Rovnosť (1) tak môžeme po vynásobení menovateľom $x + y$ a vydelení kladným číslom d zapísať v tvare

$$d^2ab^2 = p(a + b). \tag{2}$$

Keďže b^2 delí ľavú stranu, musí deliť aj pravú stranu. Avšak čísla a, b sú nesúdeliteľné, preto aj čísla b^2, $a+b$ sú nesúdeliteľné[1]. Podľa známeho tvrdenia[2] potom $b^2 \mid p$. Prvočíslo p má iba dva delitele: 1 a p. Z nich je druhou mocninou iba číslo 1, preto nutne $b = 1$. Rovnosť (2) teda môžeme prepísať na

$$d^2a = p(a + 1). \tag{3}$$

Zopakujeme teraz podobné úvahy. Keďže a delí ľavú stranu, musí deliť aj pravú stranu. Pritom čísla a, $a + 1$ sú nesúdeliteľné, takže $a \mid p$. Nutne preto buď $a = 1$, alebo $a = p$. Rozlíšime dva prípady.

Ak $a = 1$, tak po dosadení do (3) máme $d^2 = 2p$. Zrejme $2p$ je druhou mocninou prirodzeného čísla jedine v prípade $p = 2$. Potom $d = 2$ a dostávame dvojicu $x = 2$, $y = 2$.

Ak $a = p$, dosadením do (3) a vydelením kladným p dostaneme $d^2 = p + 1$, čiže $p = (d + 1)(d - 1)$. Čísla $d + 1$, $d - 1$ sú teda dva rôzne (nezáporné) delitele prvočísla p, z čoho nutne $d - 1 = 1$, $d + 1 = p$. Takže $d = 2$, $p = 3$ a dostávame dvojicu $x = 6$, $y = 2$.

Skúškou sa ľahko presvedčíme, že obe nájdené dvojice vyhovujú zadaniu.

Záver. Zadaniu vyhovujú dvojice $(2, 2)$ a $(6, 2)$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že ak sú čísla a, b nesúdeliteľné, t. j. $\mathrm{nsd}(a, b) = 1$, tak aj a) $\mathrm{nsd}(b, a + b) = 1$; b) $\mathrm{nsd}(b^2, a + b) = 1$. [a) Ak by b a $a + b$ mali deliteľa $d > 1$, ten by delil aj ich rozdiel, ktorý je rovný a, teda d by bol spoločným deliteľom čísel a, b. b) Ak by b^2 a $a + b$ mali spoločného deliteľa $d > 1$, mali by aj spoločného prvočíselného deliteľa p, ktorý by nutne delil aj b, teda b a $a + b$ by mali spoločného deliteľa $p > 1$; ďalej rovnako ako v časti a).]

N2. Dokážte, že ak $\mathrm{nsd}(k, l) = 1$ a $k \mid lm$, tak $k \mid m$. [Keďže $k \mid lm$, tak $lm = kt$ pre nejaké celé t. Keďže k, l sú nesúdeliteľné, tak $kx + ly = 1$ pre nejaké celé x, y. Vynásobením číslom m dostaneme $m = kmx + lmy = k(mx + ty)$, teda $k \mid m$.]

D1. Určte všetky dvojice prvočísel p, q, pre ktoré platí $p + q^2 = q + p^3$. [55–B–II–1]

D2. Nájdite všetky dvojice prvočísel p, q, pre ktoré platí $p + q^2 = q + 145p^2$. [55–C–II–4]

[1] Poz. prvú návodnú úlohu.

[2] Poz. druhú návodnú úlohu.

4. *Uvažujme nekonečnú aritmetickú postupnosť*

$$a, a+d, a+2d, \dots, \qquad (*)$$

kde a, d sú prirodzené (t. j. kladné celé) čísla.

a) Nájdite príklad postupnosti $(*)$, ktorá obsahuje nekonečne veľa k-tych mocnín prirodzených čísel pre všetky $k = 2, 3, \dots$

b) Nájdite príklad postupnosti $(*)$, ktorá neobsahuje žiadnu k-tu mocninu prirodzeného čísla pre žiadne $k = 2, 3, \dots$

c) Nájdite príklad postupnosti $(*)$, ktorá neobsahuje žiadnu druhú mocninu prirodzeného čísla, ale obsahuje nekonečne veľa tretích mocnín prirodzených čísel.

d) Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla a, d, k $(k > 1)$ platí: Postupnosť $(*)$ buď neobsahuje žiadnu k-tu mocninu prirodzeného čísla, alebo obsahuje nekonečne veľa k-tych mocnín prirodzených čísel.

(*Jaroslav Zhouf*)

Riešenie. a) Položme napríklad $a = 1$, $d = 1$. Potom postupnosť $(*)$ má tvar

$$1, 2, 3, 4, \dots,$$

t. j. obsahuje všetky prirodzené čísla. Medzi nimi je samozrejme nekonečne veľa k-tych mocnín pre každé k. (Vyhovujúce a, d možno zvoliť aj mnohými inými spôsobmi.)

b) Položme napríklad $a = 2$, $d = 4$. Postupnosť $(*)$ má vtedy tvar

$$2, 6, 10, 14, \dots,$$

t. j. obsahuje čísla $4n + 2$, kde $n = 0, 1, 2, \dots$ Táto postupnosť obsahuje len párne čísla, preto určite neobsahuje žiadnu k-tu mocninu *nepárneho* čísla. Avšak k-ta mocnina ľubovoľného *párneho* čísla je deliteľná číslom 2^k, teda aj číslom 4 (pre $k \geqq 2$), a nemôže byť tvaru $4n + 2$. Takže zvolená postupnosť neobsahuje žiadnu k-tu mocninu prirodzeného čísla pre žiadne $k = 2, 3, \dots$ (Podobne možno zdôvodniť, že vyhovuje postupnosť, ktorú dostaneme voľbou $a = p$, $d = p^2$ pre ľubovoľné prvočíslo p.)

c) Položme napríklad $a = 8$, $d = 16$. Postupnosť $(*)$ má vtedy tvar

$$8, 24, 40, 56, \dots,$$

t. j. obsahuje čísla $16n + 8$, kde $n = 0, 1, 2, \dots$ Keďže $16n + 8 = 8(2n + 1)$, zvolená postupnosť neobsahuje žiadnu druhú mocninu prirodzeného čísla. V rozklade na súčin prvočísel má totiž každý jej člen činiteľ 2^3, zatiaľ čo druhé mocniny majú v rozklade na súčin prvočísel všetky exponenty párne. Na druhej strane, v danej postupnosti sa zrejme nachádzajú všetky čísla $(2\cdot1)^3, (2\cdot3)^3, (2\cdot5)^3, \dots$, čiže 8-násobky tretích mocnín nepárnych čísel. Takže postupnosť obsahuje nekonečne veľa tretín mocnín prirodzených čísel. (Opäť sme mohli a, d zvoliť aj inak, stačí zobrať $a = p^3$, $d = p^4$, kde p je ľubovoľné prvočíslo.)

d) Ak sa v postupnosti $(*)$ nenachádza žiadna k-ta mocnina, dokazované tvrdenie triviálne platí. Predpokladajme, že sa v postupnosti nachádza aspoň jedna k-ta mocnina. Všeobecný člen v $(*)$ má tvar $a + nd$, pričom n je nezáporné celé číslo. Pre nejaké prirodzené číslo m teda platí $m^k = a + nd$. Chceme ukázať, že medzi členmi z $(*)$ je nekonečne veľa ďalších k-tych mocnín. Všetky členy postupnosti $(*)$ dávajú po delení číslom d rovnaký zvyšok (taký, ako dáva po delení číslom d číslo a). Zároveň vieme, že ak dve čísla dávajú po delení d rovnaký zvyšok, dávajú rovnaký zvyšok po delení d aj ich k-te mocniny. V postupnosti $(*)$ teda budú ležať aj k-te mocniny čísel $m + td$ pre ľubovoľné prirodzené číslo t. Naozaj, podľa binomickej vety máme

$$\begin{aligned}(m+td)^k &= m^k + km^{k-1}td + \tbinom{k}{2}m^{k-2}t^2d^2 + \cdots + kmt^{k-1}d^{k-1} + t^kd^k = \\ &= m^k + d\cdot\Big(km^{k-1}t + \tbinom{k}{2}m^{k-2}t^2d + \cdots + kmt^{k-1}d^{k-2} + t^kd^{k-1}\Big) = \\ &= m^k + d\cdot M = a + nd + dM = a + d(n+M).\end{aligned}$$

Keďže M (výraz vo veľkej zátvorke) je zjavne prirodzené číslo, $(m+td)^k = a+d(n+M)$ je členom postupnosti $(*)$ pre každé prirodzené t. Takže $(*)$ obsahuje nekonečne veľa k-tych mocnín.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že medzi číslami tvaru $8n + 4$ sa nachádza nekonečne veľa druhých mocnín prirodzených čísel.

N2. Dokážte, že medzi číslami tvaru $8n+4$ sa nenachádza žiadna tretia mocnina prirodzeného čísla.

N3. Dokážte tvrdenie z časti d) pre prípad $k = 2$, t. j. dokážte, že postupnosť $(*)$ buď neobsahuje žiadnu druhú mocninu, alebo obsahuje nekonečne veľa druhých mocnín prirodzených čísel.

N4. Dokážte, že ak dve čísla dávajú po delení číslom d rovnaký zvyšok, tak aj ich k-te mocniny dávajú po delení číslom d rovnaký zvyšok. [Ak $d \mid a - b$, tak aj $d \mid (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + b^{k-1}) = a^k - b^k$. Inou možnosťou je tvrdenie dokázať pomocou binomickej vety.]

D1. Rozhodnite, či existuje aritmetická postupnosť, ktorá neobsahuje žiadne Fibonacciho číslo (t. j. číslo, ktoré je členom postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, pričom $a_1 = a_2 = 1$ a $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ pre $n \geqq 1$).

---

5. *V každom vrchole pravidelného* 2008*-uholníka leží jedna minca. Vyberieme dve mince a premiestnime každú z nich do susedného vrcholu tak, že jedna sa posunie v smere a druhá proti smeru chodu hodinových ručičiek. Rozhodnite, či je možné týmto spôsobom všetky mince postupne presunúť:*

a) na 8 kôpok po 251 minciach,

b) na 251 kôpok po 8 minciach.

(*Radek Horenský*)

Riešenie. Očíslujme si zaradom vrcholy daného mnohouholníka číslami od 1 po 2008.

a) Po chvíli nájdeme postup, ako presúvať mince, aby sme došli k zadanému cieľu. Popíšeme jednu z možností.

Mince z vrcholov $1, 2, \ldots, 251$ postupne zhromaždíme na jednej kôpke vo vrchole s číslom 251. Ich pohyb budeme vyvažovať presúvaním mincí z vrcholov 1758 až 2008 do vrcholu s číslom 1758. Takto vytvoríme dve kôpky po 251 minciach. Podobným spôsobom zhromaždíme mince z vrcholov s číslami 252 až 502 na jednej kôpke vo vrchole s číslom 502. Ich pohyb vyvážime vytvorením rovnako početnej kôpky vo vrchole s číslom 1507. Takto postupujeme aj ďalej; posledné dve kôpky s 251 mincami budú vo vrcholoch s číslami 1004 a 1005.

b) Postup spĺňajúci pravidlá presunu mincí sa nájsť nedá, čo v ďalšom dokážeme.

Priraďme každej minci číslo vrcholu, v ktorom sa nachádza. Všimnime si súčet S všetkých čísel priradených minciam. Čo sa stane, keď presunieme dvojicu mincí? Ak presun nenastane medzi dvoma vrcholmi s číslami 1 a 2008, hodnota súčtu S sa nezmení: jednej z presúvaných mincí sa priradené číslo o 1 zväčší a druhej sa o 1 zmenší. Ak medzi vrcholmi s číslami 1 a 2008 presun nastane, hodnota S sa buď nezmení (vtedy, keď sa obe mince presúvajú medzi týmito vrcholmi, teda si len navzájom vymenia pozície), alebo sa zmení o 2008 (môže vzrásť alebo klesnúť). Celkovo to môžeme zhrnúť tak, že zvyšok súčtu S po delení číslom 2008 sa pri presunoch mincí nemení.

Hodnota S je na začiatku $1+2+\cdots+2008 = 1004\cdot 2009$. Toto číslo dáva po delení číslom 8 zvyšok 4. Na konci máme 251 kôpok po 8 mincí. Každá z kôpok prispieva do S násobkom čísla 8, preto hodnota S by mala byť na konci deliteľná číslom 8. Zvyšok hodnoty S po delení číslom 8 sa však nemení, lebo $8 \mid 2008$. Zvyšky hodnoty S po delení 8 sú rôzne pre úvodnú a cieľovú pozíciu, čiže popísanými presunmi mincí nemôžeme dosiahnuť z úvodnej pozície pozíciu s 251 kôpkami po 8 mincí.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Na stole je n pohárov otočených hore dnom. V jednom kroku môžeme otočiť k z nich naopak. Je možné dosiahnuť, aby po konečnom počte krokov boli všetky poháre otočené dole dnom? Vyriešte túto úlohu pre $n = 9$, $k = 2$ a $n = 9$, $k = 5$. Odpovede dôsledne zdôvodnite. [Pre $n = 9$ a $k = 5$ to je možné. Pre $n = 9$ a $k = 2$ nie, pretože sa nemení parita počtu pohárov otočených hore dnom.]

N2. V každom vrchole štvorca je jedna minca. Vyberieme dve mince a premiestnime každú z nich do susedného vrcholu tak, že jedna sa posunie v smere a druhá proti smeru chodu hodinových ručičiek. Rozhodnite, či je možné týmto spôsobom postupne premiestniť všetky mince do jedného vrcholu. [Podobne ako v riešení súťažnej úlohy budeme uvažovať zvyšok súčtu čísel priradených minciam po delení štyrmi. Je možné rozdeliť všetky možné pozície do skupín podľa tohto zvyšku, úvodná a cieľová pozícia sú v rôznych skupinách, preto sa z jednej nedá dostať do druhej.]

N3. Vyriešte predchádzajúcu návodnú úlohu s pravidelným osemuholníkom namiesto štvorca.

D1. Okolo ohňa sedí $n+1$ psov ($n \geqq 1$). Jeden z nich je šéf a má n kostí, ostatní nemajú nič. V jednom kroku zvolíme dvoch psov A a B (nie nutne rôznych), z ktorých každý má aspoň jednu kosť a spolu majú aspoň dve kosti. Zoberieme jednu kosť psovi A a dáme ju jednému zo susedov psa B a zoberieme jednu kosť psovi B a dáme ju jednému zo susedov psa A. Pre ktoré n sa po sérii vhodných krokov môžeme dostať do situácie, že každý pes okrem šéfa má jednu kosť? [KMS 2005/6, 3. zimná séria, úloha 7]

D2. Okolo okrúhleho stola sedí n detí. Erika je z nich najstaršia a má n cukríkov. Ostatné deti nemajú žiadne cukríky. Erika sa rozhodla, že cukríky rozdelí a stanovila nasledovné pravidlá. V každom kole zdvihnú ruky všetky deti, ktoré majú pri sebe aspoň dva cukríky. Erika jedného z prihlásených vyberie a ten dá každému svojmu susedovi jeden cukrík. (V prvom kole sa teda prihlási iba Erika a dá svojim susedom po cukríku.) Zistite, pre ktoré $n \geqq 3$ môže delenie po konečnom počte kôl skončiť tak, že každé dieťa bude mať práve jeden cukrík. [C-P-S trojstretnutie 2006/2]

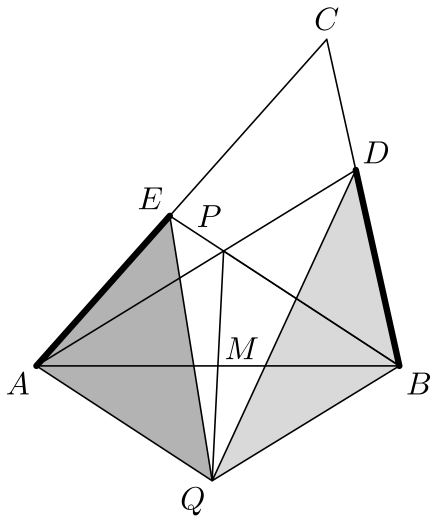
D3. Čísla $1, 2, \ldots, n$ sú v tomto poradí napísané vo vrcholoch pravidelného n-uholníka. V jednom kroku môžeme dve susedné čísla nahradiť ich aritmetickým priemerom. Je možné dosiahnuť, aby boli všetky napísané čísla rovnaké? [KMS 2006/7, 2. letná séria, úloha 10]

---

6. *Daný je trojuholník ABC. Vnútri strán AC, BC sú dané body E, D tak, že $|AE| = |BD|$. Označme M stred strany AB a P priesečník priamok AD a BE. Dokážte, že obraz bodu P v stredovej súmernosti so stredom M leží na osi uhla ACB.*

(*Ján Mazák*)

Riešenie. Nech Q je obrazom bodu P v stredovej súmernosti so stredom M. Bod Q leží na osi uhla ACB práve vtedy, keď je rovnako vzdialený od priamok AC a BC.

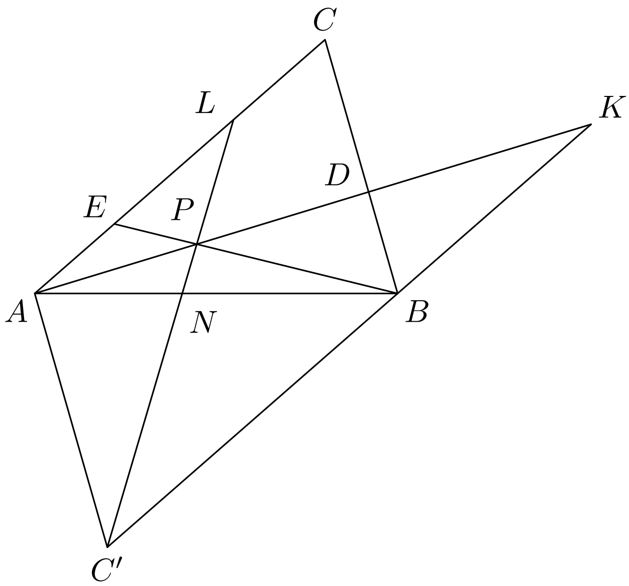


Obr. 3

Chceme využiť rovnosť dĺžok úsekov AE a BD v súvislosti s bodom Q. Všimnime si preto trojuholníky AEQ a BDQ (obr. 3). Bod Q je rovnako vzdialený od priamok AC a BC práve vtedy, keď trojuholníky AEQ a BDQ majú rovnaký obsah. Dokážeme tvrdenie o rovnosti obsahov týchto trojuholníkov.

Priamka BQ je rovnobežná s priamkou AD, pretože je jej obrazom v stredovej súmernosti so stredom M. Preto trojuholníky QBD a QBA majú rovnaký obsah (majú rovnaké výšky na spoločnú základňu QB). Podobne aj obsah trojuholníka QAE je rovnaký, ako obsah trojuholníka QAB. Takže náš dôkaz je hotový.

Iné riešenie. V zadaní sa spomína stredová súmernosť so stredom M. Takáto súmernosť často pomáha v úlohách týkajúcich sa ťažníc trojuholníka. Poďme ju využiť aj tu. Nech sa v tejto stredovej súmernosti zobrazí bod C do bodu C' a bod P do bodu Q. Ďalej označíme K priesečník priamok $C'B$ a AD. Priesečníky priamky $C'P$ s priamkami AB a AC označíme N a L (obr. 4).



Obr. 4

Máme dokázať, že bod Q leží na osi uhla ACB. Vďaka vlastnostiam stredovej súmernosti toto platí práve vtedy, keď bod P leží na osi uhla $AC'B$ (vnútorného v trojuholníku $AC'B$). Je známe (pozri druhú návodnú úlohu), že toto je pravda práve vtedy, keď bod N rozdelí úsečku AB v pomere dĺžok úsečiek AC a BC. Naším cieľom preto bude určiť veľkosť pomeru $AN : BN$. Nech $|BD| = |AE| = x$, $|CD| = y$ a $|AC| =$ $= b$.

Trojuholníky ADC a KDB sú podobné, preto

$$|BK| = |AC| \cdot \frac{|BD|}{|CD|} = b \cdot \frac{x}{y}.$$

Rovnoľahlosť rovnobežných priamok BC' a AC so stredom v bode P zachováva pomery, preto

$$|LE| = |AE| \cdot \frac{|C'B|}{|KB|} = x \cdot \frac{b}{b \cdot \frac{x}{y}} = y.$$

Nakoniec, trojuholníky ANL a BNC' sú podobné, z čoho dostaneme

$$\frac{|AN|}{|BN|} = \frac{|AL|}{|BC'|} = \frac{|AE| + |LE|}{|BC'|} = \frac{x+y}{|BC'|} = \frac{|AC'|}{|BC'|}.$$

Platnosť tejto rovnosti znamená, že priamka $C'N$, a teda aj priamka $C'P$, je osou uhla $AC'B$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. a) Nájdite množinu bodov, ktoré sú rovnako vzdialené od dvoch daných priamok.
b) S využitím vlastnosti z a) dokážte, že osi vnútorných uhlov trojuholníka sa pretínajú v jednom bode.

N2. Dokážte, že os vnútorného uhla v trojuholníku pretína protiľahlú stranu v pomere priľahlých strán. [Nech K je priesečník osi uhla ACB so stranou AB. Použijeme sínusovú vetu v trojuholníkoch CKA a CKB, využijeme, že uhly AKC a BKC sú doplnkové a uhly ACK a BCK majú rovnakú veľkosť. Iné riešenie: pomer $|AK|:|BK|$ je rovnaký, ako pomer obsahov trojuholníkov AKC a BKC, pritom tieto dva trojuholníky majú rovnako dlhé výšky z vrcholu K.]

N3. Daný je trojuholník ABC. Nájdite množinu bodov X takých, že trojuholník ABX má rovnaký obsah ako trojuholník ABC. [Dvojica priamok rovnobežných s priamkou AB a rovnako od nej vzdialených.]

N4. Nech $ABCD$ je lichobežník so základňami AB a CD. Dokážte, že priesečník priamok AC a BD, priesečník priamok AD a BC a stredy základní tohto lichobežníka ležia na priamke. [Uvažujme rovnoľahlosti, ktoré zobrazia úsečku AB na úsečku CD. Tieto rovnoľahlosti sú dve a ich stredmi sú tie dva priesečníky zo zadania úlohy. Obe tieto rovnoľahlosti zachovávajú pomery, preto zobrazia stred úsečky AB na stred úsečky CD. Takže stredy uvažovaných rovnoľahlostí ležia na spojnici stredov základní.]

N5. Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník. Stredy jeho strán označíme postupne K, L, M, N.
a) Dokážte, že $KLMN$ je rovnobežník.
b) Aký je pomer obsahov štvoruholníkov $KLMN$ a $ABCD$?

D1. Dokážte, že ťažnice v trojuholníku sa pretínajú v jednom bode a rozdelia trojuholník na 6 častí s rovnakým obsahom.

D2. Dokážte, že ak x, y, z sú dĺžky ťažníc trojuholníka ABC, tak existuje trojuholník s dĺžkami strán rovnými x, y, z. Aký obsah má tento trojuholník, ak obsah trojuholníka ABC je S? [Využite stredovú súmernosť podľa stredu strany BC.]

D3. Je daný trojuholník ABC. Vnútri jeho strán BC, CA, AB uvažujme postupne body K, L, M také, že úsečky AK, BL, CM sa pretínajú v bode U. Ak trojuholníky AMU a KCU majú obsah P a trojuholníky MBU a CLU obsah Q, potom $P = Q$. Dokážte. [49–A–S–2]

D4. Daný je trojuholník ABC a body K, L, M ležiace postupne vnútri strán BC, CA, AB tak, že priamky AK, BL, CM majú spoločný bod X.
a) Dokážte, že pomer $|AM|:|BM|$ je rovnaký, ako pomer obsahov trojuholníkov ACX a BCX.
b) Dokážte, že
$$\frac{|AM|}{|BM|}\cdot\frac{|BK|}{|CK|}\cdot\frac{|CL|}{|AL|}=1.$$
(Toto tvrdenie je časťou *Cevovej vety.* Porovnajte túto vetu s *Menelaovou vetou.* Všimnite si, že často je výhodné vo výpočtoch i dôkazoch previesť pomer vzdialeností na pomer obsahov. Použite tento prístup v druhej návodnej úlohe.)

D5. Nech K, L, M sú po rade vnútorné body strán BC, CA, AB daného trojuholníka ABC také, že kružnice vpísané dvojiciam trojuholníkov ABK a CAK, BCL a ABL, CAM a BCM majú vonkajší dotyk. Potom sa priamky AK, BL, CM pretínajú v jednom bode. Dokážte. [49–A–I–2]

D6. Určte všetky konvexné štvoruholníky $ABCD$ s nasledujúcou vlastnosťou: Vnútri štvoruholníka $ABCD$ existuje bod E taký, že každá priamka, ktorá prechádza týmto bodom a pretína strany AB a CD vo vnútorných bodoch, delí štvoruholník $ABCD$ na dve časti s rovnakým obsahom. Svoju odpoveď zdôvodnite. [49–A–II–4]