2001/2002
51. ročník MO

Riešenia úloh školského kola kategórie C

---

1. *Do športového krúžku chodí 21 chlapcov. Na posledných dvoch schôdzkach nikto nechýbal, chlapci sa zakaždým rozdelili do troch družstiev po sedem hráčov. Dokážte, že niektorí traja chlapci boli na oboch schôdzkach spolu v jednom družstve.* (J. Šimša)

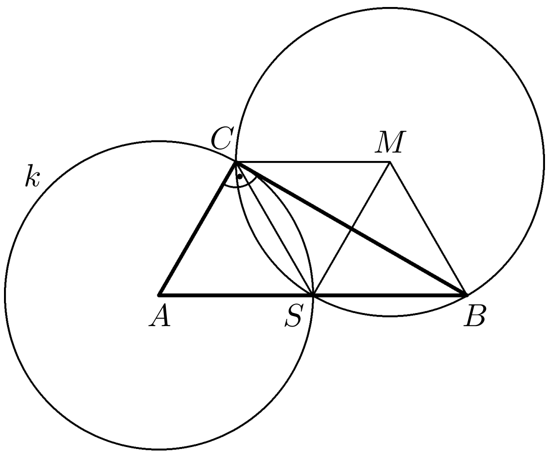
Riešenie. Uvažujme chlapca H. Šesť jeho spoluhráčov z prvej schôdzky je na druhej schôdzke rozdelených do troch družstiev. Potom sú buď traja z nich v jednom družstve, alebo sú v týchto troch družstvách rozdelení po dvoch. Chlapec H je však tiež členom niektorého z týchto družstiev, a teda v tomto družstve sa opäť nachádza trojica spoluhráčov z prvej schôdzky.

Iné riešenie. Označme A, B, C družstvá zostavené na prvej schôdzke, D, E, F družstvá zostavené na druhej schôdzke. Podľa zaradenia do družstiev sú jednotliví chlapci najviac deviatich rôznych typov AD, AE, AF, BD, BE, BF, CD, CE, CF. Keby každého typu boli najviac dvaja chlapci, bolo by na schôdzkach najviac $2 \cdot 9 = 18$ chlapcov, čo je spor s tým, že ich na krúžok chodí 21. Preto aspoň jedného typu sú aspoň traja chlapci, a to je hľadaná trojica chlapcov.

---

2. *V rovine je daný pravouhlý trojuholník ABC taký, že kružnica $k(A; |AC|)$ pretína preponu AB v jej strede S. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku BCS je zhodná s kružnicou k.* (J. Švrček)

Riešenie. Stred prepony S pravouhlého trojuholníka ABC je podľa Tálesovej vety stredom kružnice opísanej tomuto trojuholníku, platí teda $|CS| = |AS| = |BS|$ (obr. 1). Nakoľko body C a S ležia na kružnici k, platí $|AS| = |AC|$, preto trojuholník ASC je rovnostranný a veľkosť uhla CSB je rovná $120°$.



Obr. 1

Ak M je stred kružnice opísanej trojuholníku BCS, platí $|CM| = |SM| = |BM|$, a pretože $|CS| = |BS|$, sú CMS a SMB zhodné rovnoramenné trojuholníky so základňami CS a BS. Veľkosť uhla CSB je súčtom veľkostí zhodných uhlov CSM a MSB, preto veľkosť uhla MSB je rovná $120°/2 = 60°$. Trojuholník MSB je teda rovnostranný a platí $|MS| = |BS|$.

Polomer kružnice opísanej trojuholníku CSB je rovný $|MS| = |BS| = |AS|$, čo je polomer kružnice k. Kružnica opísaná trojuholníku BCS a kružnica k majú rovnaké polomery, sú teda zhodné. Tým je dôkaz ukončený.

Poznámka. Po zistení, že ASC je rovnostranný trojuholník, je možné dokončiť riešenie aj takto: Ak je D bod súmerne združený s bodom A podľa stredu C, je trojuholník ABC „polovicou“ rovnostranného trojuholníka ABD, takže stred M jeho strany BD má od bodov B, S, C rovnakú vzdialenosť rovnú $|AB|/2$.

---

3. *Určte všetky dvojice prvočísiel (p, q) také, že $p > q$ a číslo $p^2 - q^2$ má najviac štyroch deliteľov.* (*P. Calábek*)

Riešenie. Číslo 1 má práve jedného deliteľa 1. Určme ďalej všetky prirodzené čísla $a \neq 1$, ktoré majú najviac štyroch deliteľov. Také číslo a má dva triviálne delitele 1 a a, preto môže mať najviac ďalšie dva netriviálne delitele, takže je deliteľné najviac dvoma prvočíslami. Ak je číslo a deliteľné dvoma rôznymi prvočíslami p_1 a p_2, je deliteľné aj ich súčinom p_1p_2, vzhľadom na usporiadanie deliteľov čísla a musí teda platiť $a = p_1p_2$. Ak je číslo a deliteľné práve jedným prvočíslom p_1, platí $a = p_1^k$, kde k je prirodzené číslo. Jeho netriviálnymi deliteľmi sú čísla $p_1, p_1^2, \dots, p_1^{k-1}$, preto $k \leqq 3$.

Najviac štyri delitele teda majú iba číslo 1 a čísla tvaru p_1, p_1^2, p_1^3 a p_1p_2, kde p_1 a p_2 sú rôzne prvočísla.

Nech $p > q$ sú prvočísla a číslo $a = p^2 - q^2 = (p-q)(p+q)$ má najviac štyri delitele. Potom platí $1 \leqq p - q < p + q \leqq a$. Rozlíšime nasledujúce prípady:

1. $p - q = 1$. Rozdiel prvočísiel p, q je nepárne číslo, preto jedno z nich je párne a druhé sa líši o 1. Teda $p = 3$, $q = 2$ a číslo $a = 3^2 - 2^2 = 5$ má dva delitele 1 a 5.
2. $p - q > 1$. Číslo a má práve štyri rôzne delitele 1, $p - q$, $p + q$, a, preto vzhľadom na úvodnú úvahu môžu nastať dve možnosti:
   a) $p-q$ je prvočíslo p_1 a $p+q$ je p_1^2. Potom však p_1 delí $p_1^2+p_1 = p+q+(p-q) = 2p$, pritom p je prvočíslo, takže $p_1 = p$ alebo $p_1 = 2$. Rovnosťou $p-q = p_1$ je však možnosť $p_1 = p$ vylúčená, preto musí platiť $p_1 = 2$. Zo sústavy $p-q = 2$, $p+q = 4$ však vyplýva $q = 1$, čo nie je prvočíslo.
   b) $p - q$ je prvočíslo p_1 a $p + q$ je prvočíslo p_2. Pretože $p_2 > p_1$, je prvočíslo p_2 nepárne. Odtiaľ vyplýva $q = 2$, inak by číslo p_2 bolo súčtom dvoch nepárnych prvočísiel p a q, teda číslo párne. Tri prvočísla $p_1 = p - 2$, p a $p_2 = p + 2$ dávajú rôzne zvyšky pri delení tromi, takže jedno z nich je rovné 3. Z $p = 3$ však vyplýva $p_1 = 1$, z $p_2 = 3$ zasa $p = 1$, ostáva preto možnosť $p_1 = 3$, teda $p = 5$. Číslo $a = 5^2 - 2^2 = 21$ má práve štyri delitele 1, 3, 7, 21.

Všetky dvojice prvočísiel (p, q) vyhovujúce zadaniu úlohy sú dvojice $(3, 2)$ a $(5, 2)$.

Iné riešenie. Vysvetlíme najskôr, prečo $q = 2$. Pripusťme naopak, že $q > 2$. Potom obe prvočísla p a q sú nepárne, takže $(p - q)$ a $(p + q)$ sú dve rôzne párne čísla, takže ich súčin $p^2 - q^2$ je číslo tvaru $4k$, kde $k \geqq 2$. Také číslo ale má štyri delitele 1, 2, 4 a $4k$, preto sa jeho deliteľ $2k$ musí rovnať číslu 4. Platí teda $(p - q)(p + q) = 8$, odkiaľ $p - q = 2$ a $p + q = 4$, takže $q = 1$, a to je spor. Rovnosť $q = 2$ je dokázaná.

Hľadáme teda všetky prvočísla $p > 2$, pre ktoré má číslo $p^2 - 4$ najviac štyri delitele. Ľahko sa presvedčíme, že vyhovuje $p = 3$ aj $p = 5$. V prípade $p \geqq 7$ je však jedno z čísel $p + 2$, $p - 2$ deliteľné tromi (podľa toho, či prvočíslo p dáva pri delení tromi zvyšok 1 alebo 2), takže číslo $p^2 - 4$ má päť rôznych deliteľov 1, 3, $p - 2$, $p + 2$ a $p^2 - 4$.

Úlohe teda vyhovujú dve dvojice prvočísiel (p, q), a to $(3, 2)$ a $(5, 2)$.