2001/2002
51. ročník MO *Riešenia úloh krajského kola kategórie C*

1. *Určte počet dvojíc (a, b) prirodzených čísel ($1 \leqq a < b \leqq 86$), pre ktoré je súčin ab deliteľný tromi.* (J. Zhouf)

Riešenie. Najprv spočítame, koľko je všetkých dvojíc čísel takých, že $1 \leqq a < b \leqq 86$, a potom od tohto počtu odpočítame počet tých dvojíc, pre ktoré súčin ab nie je tromi deliteľný.

Označme C množinu všetkých prirodzených čísel najviac rovných 86,

$$\mathsf{C} = \{1, 2, \dots, 86\}.$$

Množina C má celkom 86 prvkov. Číslo a z nej môžeme vybrať 86 spôsobmi a ku každému takto vybranému číslu a existuje 85 čísel $b \in \mathsf{C}$ rôznych od a. Preto počet všetkých usporiadaných dvojíc (a, b) prirodzených čísel ($1 \leqq a \neq b \leqq 86$) je rovný $86 \cdot 85$. Túto množinu môžeme rozdeliť na páry usporiadaných dvojíc (a, b) a (b, a), preto práve pre polovicu dvojíc platí $a < b$ (druhú polovicu tvoria dvojice, v ktorých $a > b$). Počet všetkých dvojíc (a, b) prirodzených čísel takých, že $1 \leqq a < b \leqq 86$, je teda rovný $(86 \cdot 85)/2 = 3\,655$. (Je to zároveň počet všetkých neusporiadaných dvojíc prirodzených čísel z množiny C, čo je kombinačné číslo $\binom{86}{2} = 3\,655$.)

Súčin ab je deliteľný tromi práve vtedy, keď je aspoň jeden z činiteľov a, b deliteľný tromi. Pretože medzi číslami z množiny C je práve 28 čísel deliteľných tromi, je v C práve $86 - 28 = 58$ čísel, ktoré nie sú deliteľné tromi. Celkom teda môžeme zostaviť $(58 \cdot 57)/2 = 1\,653$ dvojíc rôznych prirodzených čísel (a, b) takých, že $1 \leqq a < b \leqq 86$, a pritom súčin ab nie je deliteľný tromi.

Počet všetkých dvojíc (a, b) prirodzených čísel ($1 \leqq a < b \leqq 86$), pre ktoré je súčin ab deliteľný tromi, je rovný $3\,655 - 1\,653 = 2\,002$.

Iné riešenie. Označme A, resp. B, množinu všetkých tých dvojíc (a, b) ($1 \leqq a < b \leqq 86$), v ktorých je číslo a, resp. b deliteľné tromi. Medzi číslami v množine $\mathsf{C} = \{1, 2, \dots, 86\}$ existuje 28 čísel deliteľných tromi (sú to čísla $3, 6, 9, \dots, 84$). Ku každému číslu $a \in \mathsf{C}$ existuje $86 - a$ čísel $b \in \mathsf{C}$ takých, že $a < b$. Preto počet všetkých prvkov množiny A je rovný

$$\begin{aligned}
&(86-3) + (86-6) + (86-9) + \dots + (86-84) = \\
&\quad = 28 \cdot 86 - 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 28) = \\
&\quad = 28 \cdot 86 - 3 \cdot \frac{1}{2}\big((1+28) + (2+27) + (3+26) + \dots + (28+1)\big) = \\
&\quad = 28 \cdot 86 - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 29 \cdot 28 = 2\,408 - 1\,218 = 1\,190.
\end{aligned}$$

Ku každému číslu $b \in \mathsf{C}$ existuje $b - 1$ čísel $a \in \mathsf{C}$ takých, že $a < b$. Preto počet všetkých prvkov množiny B je rovný

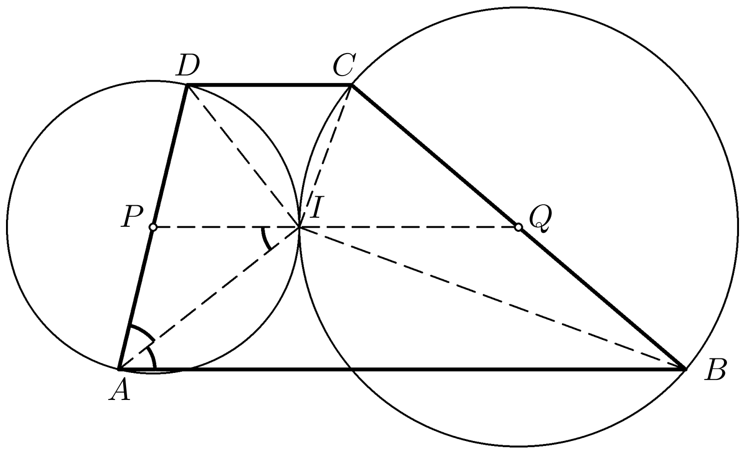
$$\begin{aligned}
&(3-1) + (6-1) + (9-1) + \dots + (84-1) = \\
&\qquad = 3 \cdot (1 + 2 + \dots + 28) - 28 = 1\,218 - 28 = 1\,190.
\end{aligned}$$

Prienik množín A a B obsahuje také dvojice čísel (a, b), v ktorých sú obe zložky a aj b deliteľné tromi, pričom $a < b$. Týchto dvojíc je podľa úvahy z úvodného riešenia $(28 \cdot \cdot 27)/2 = 378$. Počet prvkov zjednotenia množín A a B, t. j. počet všetkých dvojíc (a, b) prirodzených čísel $(1 \leqq a < b \leqq 86)$, pre ktoré je súčin ab deliteľný tromi, je rovný súčtu prvkov množín A a B zmenšený o počet prvkov ich prieniku, t. j. $1\,190 + 1\,190 - 378 = = 2\,002$.

---

2. *Nech kružnice zostrojené nad ramenami lichobežníka ako nad priemermi majú vonkajší dotyk. Dokážte, že dotykový bod týchto kružníc leží na osi uhla, ktorý obe ramená lichobežníka zvierajú.* (*J. Švrček*)

Riešenie. Nech $ABCD$ je lichobežník so základňami AB a CD spĺňajúci predpoklady zadania (obr. 1). Označme P stred ramena AD, Q stred ramena BC a I dotykový



Obr. 1

bod kružníc zostrojených nad ramenami ako priemermi. Bod P je stredom kružnice zostrojenej nad ramenom AD, preto sú úsečky PA a PI zhodné a API je rovnoramenný trojuholník so základňou AI. Odtiaľ vyplýva, že uhly PAI a AIP sú zhodné. Pretože bod dotyku dvoch kružníc leží na spojnici ich stredov, je I bodom strednej priečky PQ lichobežníka $ABCD$, ktorá je rovnobežná s jeho základňami. Uhly PIA a IAB sú striedavé a majú preto rovnakú veľkosť. Teda uhly PAI a IAB sú zhodné a AI je osou uhla DAB. Bod I leží na osi tohto uhla, preto má rovnakú vzdialenosť od jeho ramien AD a AB. Podobne sa ukáže, že IB je osou uhla ABC a bod I má rovnakú vzdialenosť od priamok AB a BC. Odtiaľ už vyplýva, že bod I má rovnakú vzdialenosť od ramien AD a BC, a leží preto na osi uhla, ktorý tieto ramená zvierajú.

---

3. *Nájdite všetky celé čísla x, pre ktoré sú obe čísla $(x-3)^2-2$, $(x-7)^2+1$ prvočísla.* (*J. Šimša*)

Riešenie. Obe čísla 3 a 7 sú nepárne, preto pre ľubovoľné celé číslo x majú čísla $x-3$ a $x-7$ (a teda aj čísla $(x-3)^2$ a $(x-7)^2$) rovnakú paritu. Čísla -2 a 1 majú rôznu paritu, preto čísla $(x-3)^2-2$, $(x-7)^2+1$ majú rôznu paritu, jedno z nich je teda párne. Pretože jediné párne prvočíslo je číslo 2, je jedno z čísel $(x-3)^2-2$, $(x-7)^2+1$ rovné 2.

a) Nech $(x-3)^2-2=2$. Potom $(x-3)^2=4$, t. j. $x=5$ alebo $x=1$. Pre $x=5$ je hodnota výrazu $(x-7)^2+1$ rovná 5, čo je prvočíslo, pre $x=1$ je hodnota tohto výrazu rovná 37, čo je tiež prvočíslo.

b) Nech $(x-7)^2+1=2$. Potom $(x-7)^2=1$, t. j. $x=8$ alebo $x=6$. Pre $x=8$ je hodnota výrazu $(x-3)^2-2$ rovná 23, čo je prvočíslo, pre $x=6$ je hodnota tohto výrazu rovná 7, čo je tiež prvočíslo.

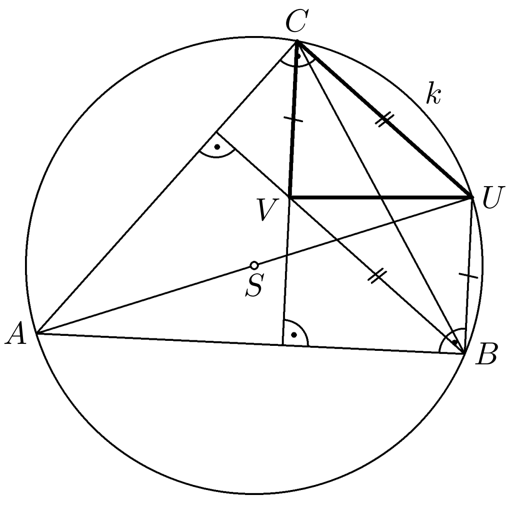
Hľadanými celými číslami x sú všetky prvky množiny $\{1,5,6,8\}$.

---

4. *V rovine sú dané body C, V, U také, že $|CV|=3\,\mathrm{cm}$, $|VU|=3{,}5\,\mathrm{cm}$ a $|CU|=4{,}5\,\mathrm{cm}$. Zostrojte ostrouhlý trojuholník ABC tak, aby bol V priesečník jeho výšok a bod U bol súmerne združený s bodom A podľa stredu kružnice opísanej trojuholníku ABC.*

(*P. Leischner*)

Riešenie. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník, S stred kružnice k jemu opísanej a V priesečník jeho výšok (obr. 2). Nech U je bod súmerne združený s bodom A podľa S.



Obr. 2

Bod U leží na kružnici k vnútri toho oblúka BC, ktorý neobsahuje bod A. Úsečka AU je priemerom kružnice k, preto podľa Tálesovej vety sú uhly UCA a UBA pravé. Nakoľko výška BV je kolmá na stranu AC trojuholníka ABC, sú úsečky BV a UC rovnobežné. Z podobného dôvodu sú rovnobežné aj úsečky CV a UB, takže $BUCV$ je rovnobežník. Úsečky BC a UV majú teda spoločný stred.

Odtiaľ už vyplýva konštrukcia. Zostrojíme bod B súmerne združený s bodom C podľa stredu úsečky UV. Bod A potom určíme ako priesečník kolmice na priamku BU prechádzajúcej bodom B a kolmice na priamku CU prechádzajúcej bodom C.

Ukážme teraz, že takto zostrojený trojuholník ABC má všetky požadované vlastnosti. Bod B je zostrojený tak, že platí $BV \parallel UC$ a $CV \parallel UB$. Bod A je zostrojený tak, že platí $AB \perp UB$ a $AC \perp UC$, čo znamená, že body B a C ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom AU. Body A a U sú teda súmerne združené podľa stredu tejto kružnice, ktorá je opísaná trojuholníku ABC. Zo vzťahov $AC \perp UC$ a $BV \parallel UC$ vyplýva $BV \perp \perp AC$, takže bod V leží na výške z vrcholu B na stranu AC zostrojeného trojuholníka. Podobne zo vzťahov $AB \perp UB$ a $CV \parallel UB$ vyplýva, že bod V leží na výške z vrcholu C na stranu AB. Bod V je teda priesečník výšok trojuholníka ABC.

Úloha má za daných podmienok práve jedno riešenie.