2017/2018
67. ročník MO *Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia juniorov*

(*Súťaž sa konala 20. – 23. 5. 2018.*)

Súťaž jednotlivcov:

I-1. Dané sú tri kladné reálne čísla x, y, z. Rozhodnite, či vždy existuje štvorica (a, b, c, d) reálnych čísel taká, že

$$ad + bc = x, \qquad ac + bd = y, \qquad ab + cd = z$$

a jedno z čísel a, b, c, d je rovné súčtu zvyšných troch. (*Łukasz Bożyk*)

I-2. Daný je konvexný šesťuholník $ABCDEF$, ktorého strany AB a DE sú rovnobežné. Každá z uhlopriečok AD, BE, CF rozdeľuje šesťuholník na dva štvoruholníky s rovnakým obvodom. Dokážte, že tieto tri uhlopriečky sa pretínajú v jednom bode. (*Jaroslav Švrček*)

I-3. Pani učiteľka dala každému zo svojich 37 žiakov 36 pasteliek rôznych farieb. Pritom každí dvaja žiaci dostali práve jednu pastelku rovnakej farby. Určte najmenší možný počet farieb, ktoré môžu mať všetky rozdané pastelky. (*Patrik Bak*)

I-4. Nájdite najmenšie prirodzené číslo A s nepárnym počtom cifier také, že A je deliteľné číslom 2 018 a číslo B, ktoré vznikne tak, že v A vynecháme prostrednú cifru, je tiež deliteľné číslom 2 018. (*Jaromír Šimša*)

I-5. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC, pričom $|AB| < |AC|$. Na jeho strane AC uvažujme bod E taký, že $|AB| = |AE|$. Nech AD je priemer kružnice opísanej trojuholníku ABC a S je stred oblúka BDC tejto kružnice. Označme F obraz bodu D v stredovej súmernosti podľa stredu S. Dokážte, že priamky FE a AC sú navzájom kolmé. (*Patrik Bak*)

Súťaž družstiev:

T-1. Pro přirozená čísla a, b c platí

$$(a+b+c)^2 \mid ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 3abc.$$

Dokažte, že

$$(a+b+c) \mid (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$

(*Patrik Bak*)

T-2. Daný je pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB. Nech K je ľubovoľný vnútorný bod trojuholníka ABC a body L, M sú obrazy bodu K v osových súmernostiach postupne podľa priamok BC, AC. Určte všetky možné hodnoty výrazu S_{ABLM}/S_{ABC}, pričom $S_{XY\ldots Z}$ označuje obsah mnohouholníka $XY\ldots Z$. (*Jaroslav Švrček*)

T-3. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste r o następującej własności: Jeżeli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówność $|ax^2 + bx + c| \leqq 1$ dla każdego $x \in \langle -1, 1 \rangle$, to spełniają również nierówność $|cx^2 + bx + a| \leqq r$ dla każdego $x \in \langle -1, 1 \rangle$.

(*Jaromír Šimša*)

T-4. Přímka procházející středem M rovnostranného trojúhelníku ABC protíná jeho strany BC a CA po řadě v bodech D a E. Kružnice opsané trojúhelníkům AEM a BDM se kromě bodu M dále protínají v bodě P. Dokažte, že střed kružnice opsané trojúhelníku DEP leží na ose úsečky AB. (*Tomasz Przybyłowski*)

T-5. Okolo okrúhleho stola sedí $2n$ ľudí ($n \geqq 2$), pričom každý človek sa pozná s oboma svojimi susedmi a presne oproti nemu sedí človek, s ktorým sa nepozná. Dokážte, že ľudí možno presadiť tak, že každý sa bude poznať práve s jedným zo svojich dvoch susedov. (*Łukasz Bozyk*)

T-6. Dodatnie liczby rzeczywiste a, b są takie, że $a^3 + b^3 = 2$. Wykaż, że zachodzi nierówność

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqq 2(a^2 - a + 1)(b^2 - b + 1).$$

(*Patrik Bak*)