SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY
Fakulta PEDAS Žilinskej univerzity, Univerzitná 1, 010 26 Žilina

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

Kategórie A, B, C

57. ročník, školský rok 2007/2008

I. kolo (domáca časť)

Vážení žiaci stredných škôl,

Slovenská komisia matematickej olympiády vás pozýva zúčastniť sa 57. ročníka matematickej olympiády – súťaže pre žiakov stredných škôl v našej republike.

Kategória **A** je určená žiakom maturitných a predmaturitných ročníkov.
Kategória **B** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 2 roky.
Kategória **C** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 3 roky.
Pre žiakov prvých, prípravných ročníkov bilingválnych gymnázií je určená kategória **Z9**.

Organizácia súťaže v kategóriách **A, B, C**:

V **domácej časti I. kola** na vás čaká **6 úloh**, ktoré nájdete v tomto letáku. Ich riešenia (nie nutne všetkých úloh) odovzdajte svojmu učiteľovi matematiky do **26. novembra 2007** (kategória **A**) a do **10. januára 2008** (kategórie **B** a **C**). Ten ich opraví, ohodnotí podľa stupnice 1 – *výborne*, 2 – *dobre*, 3 – *nevyhovuje*. Potom ich s vami rozoberie, vysvetlí vám prípadné nedostatky a oboznámi vás so správnym riešením. Ak budú vaše riešenia aspoň štyroch úloh ohodnotené ako výborné alebo dobré, budete pozvaní do **školskej časti I. kola**. Tam budete v stanovenom čase samostatne riešiť ďalšie tri úlohy. Opravené riešenia školského aj domáceho kola úspešných riešiteľov školského kola potom váš učiteľ matematiky pošle na príslušnú krajskú komisiu MO. Tá na základe výsledkov pozve najlepších účastníkov školského kola do **II. kola**, v ktorom budú v priebehu štyroch hodín samostatne riešiť štyri úlohy. V kategóriách **B** a **C** tým súťaž končí. O poradí v druhých kolách rozhoduje súčet bodov získaných za jednotlivé úlohy. Pokiaľ prvých n žiakov dosiahne rovnaký počet bodov, je poradie označené zhodne prvým až n-tým miestom. Podobne pre poradie na ďalších miestach. Žiadne iné kritériá nie sú prípustné.

V kategórii **A** budú ešte najlepší riešitelia II. kola z celej republiky súťažiť v **III. kole**, celoštátnom, kde budú dva dni (po 4,5 hodinách) riešiť dve trojice úloh. Najviac polovica účastníkov tohto kola bude vyhlásená za úspešných riešiteľov a najviac štvrtina za víťazov 57. ročníka v kategórii **A**. Z úspešných riešiteľov III. kola sa vyberá družstvo Slovenskej republiky na Medzinárodnú matematickú olympiádu, na medzištátne stretnutie s Českou republikou a Poľskom a na Stredoeurópsku matematickú olympiádu.

Termíny 57. ročníka matematickej olympiády:

	I. kolo (školská časť)	II. kolo (krajské)	III. kolo (celoštátne)
Kategória A	04. 12. 2007	23. 01. 2008	09. – 12. 03. 2008
Kategórie B, C	24. 01. 2008	01. 04. 2008	—

Matematickú olympiádu vyhlasuje *Ministerstvo školstva SR* v spolupráci s *Jednotou slovenských matematikov a fyzikov* a *Slovenskou komisiou matematickej olympiády*. Súťaž riadi *Slovenská komisia MO* a v krajoch ju riadia *krajské komisie MO* pri pobočkách JSMF. Na jednotlivých školách ju zaisťujú učitelia matematiky. Vy sa obracajte na svojho učiteľa matematiky. Celoštátne kolo MO, tlač materiálov MO a ich distribúciu po organizačnej stránke zabezpečuje IUVENTA Bratislava v tesnej súčinnosti so Slovenskou komisiou matematickej olympiády.

Riešenia súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

Emil Kruh
I.C, Gymnázium L. Eulera
Okrúhle nám. 5, 940 01 Nové Zámky
Kraj Nitra
2007/2008
C – I – 3

Posledný údaj je označenie úlohy podľa tohto letáka. Zadania úloh nemusíte opisovať. Ak sa vám riešenie nezmestí na jeden list, uveďte na ďalších listoch vľavo hore svoje meno a označenie úlohy a strany očíslujte. **Riešenie píšte ako výklad, v ktorom sú uvedené všetky podstatné úvahy tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup.**

Veľa radosti z úspešného riešenia úloh vám všetkým praje

Doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.
predseda Slovenskej komisie MO

Archív zadaní a riešení úloh MO nájdete na internetových stránkach:

http://www.iuventa.sk
http://pppnnn.webpark.sk/mo.htm
http://matematika.webpark.sk

Radi by sme upozornili učiteľov a žiakov na Korešpondenčný matematický seminár (KMS) organizovaný združením Trojsten. Táto súťaž je veľmi efektívnou formou prípravy na MO a tiež zdokonaľovania sa v matematickom myslení ako takom. K tomu prispievajú aj záverečné sústredenia pre najlepších riešiteľov. Pre riešiteľov MO kategórií B a C je v KMS určená kategória ALFA. Pre lepších a skúsenejších z kategórie B a pre kategóriu A je v KMS určená kategória BETA. A nakoniec pre tých, čo majú ambície uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je v KMS určená kategória GAMA. Viac informácií o KMS nájdete v priloženom samostatnom letáku.

Na ďalšiu spoluprácu sa tešia

Mgr. Peter Novotný, Mgr. Ján Mazák

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

57. ročník Školský rok 2007 / 2008 I. kolo (domáca časť)

****

KATEGÓRIA A

A – I – 1

Nájdite všetky také trojice reálnych čísel a, b, c, že každá z rovníc

$$\begin{aligned} x^3+(a+1)x^2+(b+3)x+(c+2)&=0,\\ x^3+(a+2)x^2+(b+1)x+(c+3)&=0,\\ x^3+(a+3)x^2+(b+2)x+(c+1)&=0 \end{aligned}$$

má v obore reálnych čísel tri rôzne korene, spolu je to však iba päť rôznych čísel.

(*Jaromír Šimša*)

A – I – 2

V rovine je daná úsečka AV a ostrý uhol veľkosti α. Určte množinu stredov kružníc opísaných všetkým tým trojuholníkom ABC s vnútorným uhlom α pri vrchole A, ktorých výšky sa pretínajú v bode V. (*Pavel Leischner*)

A – I – 3

Množinu M tvorí $2n$ rôznych kladných reálnych čísel, pričom $n \geq 2$. Uvažujme n obdĺžnikov, ktorých rozmery sú čísla z množiny M, pričom každý prvok z M je použitý práve raz. Určte, aké rozmery majú tieto obdĺžniky, ak je súčet ich obsahov

a) najväčší možný; b) najmenší možný. (*Jaroslav Švrček*)

A – I – 4

Určte počet konečných rastúcich postupností prirodzených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k$ všetkých možných dĺžok k, pre ktoré platí $a_1 = 1$, $a_i \mid a_{i+1}$ pre $i = 1, 2, \ldots, k-1$ a $a_k = 969\,969$. (*Martin Panák*)

A – I – 5

Je daná kružnica k, bod O, ktorý na nej neleží, a priamka p, ktorá ju nepretína. Uvažujme ľubovoľnú kružnicu l, ktorá má vonkajší dotyk s kružnicou k a dotýka sa aj priamky p. Príslušné body dotyku označme A a B. Pokiaľ body O, A, B neležia na jednej priamke, zostrojíme kružnicu m opísanú trojuholníku OAB. Dokážte, že všetky také kružnice m prechádzajú spoločným bodom rôznym od bodu O, alebo sa dotýkajú jednej priamky. (*Ján Mazák*)

A – I – 6

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n existuje celé číslo a ($1 < a < 5^n$) také, že platí $5^n \mid a^3 - a + 1$. (*Ján Mazák*)

KATEGÓRIA B

B – I – 1

Nájdite všetky prirodzené čísla k, pre ktoré je dekadický zápis čísla $6^k \cdot 7^{2007-k}$ ukončený dvojčíslím a) 02; b) 04. (*Eva Řídká*)

B – I – 2

V páse medzi rovnobežkami p, q sú dané dva rôzne body M a N. Zostrojte kosoštvorec alebo štvorec, ktorého dve protiľahlé strany ležia na priamkach p a q a zostávajúce dve strany prechádzajú bodmi M a N (každá jedným). (*Jaromír Šimša*)

B – I – 3

Dokážte, že ak x a y sú reálne čísla, pre ktoré platí $x^3 + y^3 \le 2$, tak $x + y \le 2$. (*Ján Mazák*)

B – I – 4

Nájdite všetky pravouhlé trojuholníky s dĺžkami strán a, b, c a dĺžkami ťažníc t_a, t_b, t_c, pre ktoré platí $a+t_a = b+t_b$. Uvažujte oba prípady, keď AB je a) prepona, b) odvesna. (*Pavel Novotný*)

B – I – 5

Určte všetky dvojice a, b reálnych čísel, pre ktoré má každá z kvadratických rovníc

$$ax^2 + 2bx + 1 = 0, \quad bx^2 + 2ax + 1 = 0$$

dva rôzne reálne korene, pričom práve jeden z nich je spoločný obom rovniciam.

(*Jaroslav Švrček*)

B – I – 6

Obdĺžnik $2\,005 \times 2\,007$ je rozdelený na čierne a biele jednotkové štvorčeky. Dokážte, že pre niektorú z farieb (čiernu alebo bielu) existuje viac ako 95 800 pravouholníkov so šírkou aspoň 2, ktoré sa skladajú z jednotkových štvorčekov, navzájom sa neprekrývajú a ktorých rohové políčka majú túto farbu. (*Pavel Leischner*)

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

57. ročník Školský rok 2007 / 2008 I. kolo (domáca časť)

****

KATEGÓRIA C

C – I – 1

Určte najmenšie prirodzené číslo n, pre ktoré aj čísla $\sqrt{2n}$, $\sqrt[3]{3n}$, $\sqrt[5]{5n}$ sú prirodzené.

(*Jaroslav Švrček*)

C – I – 2

Štvoruholníku $ABCD$ je vpísaná kružnica so stredom S. Určte rozdiel $|\sphericalangle ASD| - |\sphericalangle CSD|$, ak $|\sphericalangle ASB| - |\sphericalangle BSC| = 40°$.

(*Jaromír Šimša*)

C – I – 3

Máme určitý počet krabičiek a určitý počet guľôčok. Ak dáme do každej krabičky práve jednu guľôčku, ostane nám n guľôčok. Keď však necháme práve n krabičiek bokom, môžeme všetky guľôčky rozmiestniť tak, aby ich v každej zostávajúcej krabičke bolo práve n. Koľko máme krabičiek a koľko guľôčok?

(*Vojtech Bálint*)

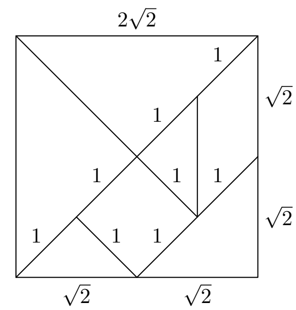
C – I – 4

Tangram je skladačka, ktorú možno vyrobiť z papiera rozrezaním vystrihnutého štvorca na sedem dielov podľa čiar vyznačených na obrázku. Predpokladajme, že dĺžka strany štvorca je $2\sqrt{2}$ cm. Rozhodnite, či možno z dielov tangramu zložiť:

a) obdĺžnik $2\,\mathrm{cm} \times 4\,\mathrm{cm}$,

b) obdĺžnik $\sqrt{2}\,\mathrm{cm} \times 4\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$.

(*Pavel Leischner*)



C – I – 5

V skupine n ľudí ($n \geq 4$) sa niektorí poznajú. Vzťah "poznať sa" je vzájomný: ak osoba A pozná osobu B, tak aj B pozná A a nazývame ich dvojicou známych.

a) Dokážte, že ak medzi každými štyrmi osobami sú aspoň štyri dvojice známych, tak každé dve osoby, ktoré sa nepoznajú, majú spoločného známeho.

b) Zistite, pre ktoré $n \geq 4$ existuje skupina osôb, v ktorej sú medzi každými štyrmi osobami aspoň tri dvojice známych a súčasne sa niektoré dve osoby ani nepoznajú, ani nemajú spoločného známeho.

c) Rozhodnite, či v skupine šiestich osôb môžu byť v každej štvorici práve tri dvojice známych a práve tri dvojice neznámych.

(*Ján Mazák*)

C – I – 6

Klárka mala na papieri napísané trojciferné číslo. Keď ho správne vynásobila deviatimi, dostala štvorciferné číslo, ktoré začínalo rovnakou číslicou ako pôvodné číslo, prostredné dve číslice sa rovnali a posledná číslica bola súčtom číslic pôvodného čísla. Ktoré štvorciferné číslo mohla Klárka dostať?

(*Peter Novotný*)

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta PEDAS Žilinskej univerzity, Univerzitná 1, 010 26 Žilina

57. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Leták kategórií A, B, C - I. kolo, domáca časť

Autori úloh: Doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., Mgr. Pavel Leischner, PhD., Mgr. Ján Mazák,
Doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., Mgr. Peter Novotný, Mgr. Martin Panák, PhD.,
RNDr. Eva Řídká, Doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.

Vydala IUVENTA s finančnou podporou Ministerstva školstva SR

Miesto a dátum vydania: Bratislava, september 2007

Náklad: 600

Sadzbu programom TEX pripravil Mgr. Peter Novotný

Zodpovedný redaktor: Doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.