SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY
Fakulta PEDAS Žilinskej univerzity, Univerzitná 1, 010 26 Žilina

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

Kategórie A, B, C

56. ročník, školský rok 2006/2007

I. kolo (domáca časť)

Vážení žiaci stredných škôl,

Slovenská komisia matematickej olympiády vás pozýva zúčastniť sa 56. ročníka matematickej olympiády – súťaže pre žiakov stredných škôl v našej republike.

Kategória **A** je určená žiakom maturitných a predmaturitných ročníkov.
Kategória **B** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 2 roky.
Kategória **C** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako tri roky.
Pre žiakov prvých, prípravných ročníkov bilingválnych gymnázií je určená kategória **Z9**.

Organizácia súťaže v kategóriách **A, B, C**:

V **domácej časti I. kola** na vás čaká **6 úloh**, ktoré nájdete v tomto letáku. Ich riešenia (nie nutne všetkých úloh) odovzdajte svojmu učiteľovi matematiky do **24. novembra 2006** (kategória **A**) a do **15. januára 2007** (kategórie **B** a **C**). Ten ich opraví, ohodnotí podľa stupnice 1 – *výborne*, 2 – *dobre*, 3 – *nevyhovuje*. Potom ich s vami rozoberie, vysvetlí vám prípadné nedostatky a oboznámi vás so správnym riešením. Ak budú vaše riešenia aspoň štyroch úloh ohodnotené ako výborné alebo dobré, budete pozvaní do **školskej časti I. kola**. Tam budete v stanovenom čase samostatne riešiť ďalšie tri úlohy. Opravené riešenia školského aj domáceho kola úspešných riešiteľov školského kola potom váš učiteľ matematiky pošle na príslušnú krajskú komisiu MO. Tá na základe výsledkov pozve najlepších účastníkov školského kola do **II. kola**, v ktorom budú v priebehu štyroch hodín samostatne riešiť štyri úlohy. V kategóriách **B** a **C** tým súťaž končí. O poradí v druhých kolách rozhoduje súčet bodov získaných za jednotlivé úlohy. Pokiaľ prvých n žiakov dosiahne rovnaký počet bodov, je poradie označené zhodne prvým až n-tým miestom. Podobne pre poradie na ďalších miestach. Žiadne iné kritériá nie sú prípustné.

V kategórii **A** budú ešte najlepší riešitelia II. kola z celej republiky súťažiť v **III. kole**, celoštátnom, kde budú dva dni (po 4,5 hodinách) riešiť dve trojice úloh. Najviac polovica účastníkov tohto kola bude vyhlásená za úspešných riešiteľov a najviac štvrtina za víťazov 56. ročníka v kategórii **A**. Z víťazov III. kola sa vyberá družstvo Slovenskej republiky na Medzinárodnú matematickú olympiádu a na medzištátne stretnutie s Českou republikou a Poľskom.

Termíny 56. ročníka matematickej olympiády:

	I. kolo (školská časť)	II. kolo (krajské)	III. kolo (celoštátne)
Kategória A	05. 12. 2006	23. 01. 2007	18. – 21. 03. 2007
Kategórie B, C	25. 01. 2007	27. 03. 2007	—

Matematickú olympiádu vyhlasuje *Ministerstvo školstva SR* v spolupráci s *Jednotou slovenských matematikov a fyzikov* a *Slovenskou komisiou matematickej olympiády.* Súťaž riadi *Slovenská komisia MO* a v krajoch ju riadia *krajské komisie MO* pri pobočkách JSMF. Na jednotlivých školách ju zaisťujú učitelia matematiky. Vy sa obracajte na svojho učiteľa matematiky. Celoštátne kolo MO, tlač materiálov MO a ich distribúciu po organizačnej stránke zabezpečuje IUVENTA Bratislava v tesnej súčinnosti so Slovenskou komisiou matematickej olympiády.

Riešenia súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

Emil Kruh
I.C, Gymnázium L. Eulera
Okrúhle nám. 5, 940 01 Nové Zámky
Kraj Nitra
2006/2007
C – I – 3

Posledný údaj je označenie úlohy podľa tohto letáka. Zadania úloh nemusíte opisovať. Ak sa vám riešenie nezmestí na jeden list, uveďte na ďalších listoch vľavo hore svoje meno a označenie úlohy a strany očíslujte. **Riešenie píšte ako výklad, v ktorom sú uvedené všetky podstatné úvahy tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup.**

Veľa radosti z úspešného riešenia úloh vám všetkým praje

Doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.
predseda Slovenskej komisie MO

Archív zadaní a riešení úloh MO nájdete na internetových stránkach:

http://www.iuventa.sk
http://pppnnn.webpark.sk/mo.htm
http://matematika.webpark.sk

Radi by sme upozornili učiteľov a žiakov na Korešpondenčný matematický seminár (KMS) organizovaný združením Trojsten. Táto súťaž je veľmi efektívnou formou prípravy na MO a tiež zdokonaľovania sa v matematickom myslení ako takom. K tomu prispievajú aj záverečné sústredenia pre najlepších riešiteľov. Pre riešiteľov MO kategórií B a C je v KMS určená kategória ALFA. Pre lepších a skúsenejších z kategórie B a pre kategóriu A je v KMS určená kategória BETA. A nakoniec pre tých, čo majú ambície uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je v KMS určená kategória GAMA. Viac informácií o KMS nájdete v priloženom samostatnom letáku.

Na ďalšiu spoluprácu sa teší

Martin Potočný

KATEGÓRIA A

A – I – 1

V obore reálnych čísel vyriešte rovnicu

$$4x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 22x + 14 = 0,$$

keď viete, že má štyri rôzne reálne korene, pričom súčet dvoch z nich sa rovná číslu 1.

(*Jaromír Šimša*)

A – I – 2

Kružnica vpísaná do daného trojuholníka ABC sa dotýka strán BC, CA, AB postupne v bodoch K, L, M. Označme P priesečník osi vnútorného uhla pri vrchole C s priamkou MK. Dokážte, že priamky AP a LK sú rovnobežné. (*Peter Novotný*)

A – I – 3

Ak x, y, z sú reálne čísla z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ spĺňajúce podmienku $xy + yz + zx = 1$, tak platí

$$6\sqrt[3]{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)} \leq 1 + (x+y+z)^2.$$

Dokážte a zistite, kedy nastáva rovnosť. (*Jaroslav Švrček*)

A – I – 4

Určte, pre ktoré prirodzené čísla n sa množina $\mathsf{M} = \{1, 2, \ldots, n\}$ dá rozdeliť

a) na dve,

b) na tri

navzájom disjunktné podmnožiny s rovnakým počtom prvkov tak, aby každá z nich obsahovala aj aritmetický priemer všetkých svojich prvkov. (*Peter Novotný*)

A – I – 5

V rovine je daná kružnica k so stredom S a bod $A \neq S$. Určte množinu stredov kružníc opísaných všetkým trojuholníkom ABC, ktorých strana BC je priemerom kružnice k. (*Jiří Dula*)

A – I – 6

Určte všetky funkcie $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ také, že pre všetky celé čísla x, y platí

$$f(f(x) + y) = x + f(y + 2\,006).$$

(*Petr Kaňovský*)

KATEGÓRIA B

B – I – 1

Nájdite všetky dvojice celých čísel (a, b), ktoré sú riešením rovnice

$$a^2 + 7ab + 6b^2 + 5a + 4b + 3 = 0.$$

(*Pavel Novotný*)

B – I – 2

Daná je kružnica k s priemerom AB. K ľubovoľnému bodu Y kružnice k, $Y \neq A$, zostrojme na polpriamke AY bod X, pre ktorý platí $|AX| = |YB|$. Určte množinu všetkých takých bodov X. (*Pavel Leischner*)

B – I – 3

Nájdite najmenšie prirodzené číslo k také, že každá k-prvková množina trojciferných po dvoch nesúdeliteľných čísel obsahuje aspoň jedno prvočíslo. (*Pavel Novotný*)

B – I – 4

V ľubovoľnom trojuholníku ABC označme T ťažisko, D stred strany AC a E stred strany BC. Nájdite všetky pravouhlé trojuholníky ABC s preponou AB, pre ktoré je štvoruholník $CDTE$ dotyčnicový. (*Ján Mazák*)

B – I – 5

Nájdite všetky dvojice reálnych čísel (p, q) také, že mnohočlen x^2+px+q je deliteľom mnohočlena $x^4 + px^2 + q$. (*Jozef Moravčík*)

B – I – 6

Daná je úsečka AA_0 a priamka p. Zostrojte trojuholník s vrcholom A a výškou AA_0, ktorého ťažisko a stred kružnice opísanej ležia na priamke p. (*Eva Řídká*)

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

56. ročník Školský rok 2006 / 2007 I. kolo (domáca časť)

****

KATEGÓRIA C

C – I – 1

Určte všetky dvojice prirodzených čísel (a, b), pre ktoré platí

$$a + 5\sqrt{b} = b + 5\sqrt{a}.$$

(*Jaroslav Švrček*)

C – I – 2

Nájdite všetky trojuholníky, ktoré sa dajú rozrezať na lichobežníky so stranami dĺžok 1 cm, 1 cm, 1 cm a 2 cm. (*Ján Mazák*)

C – I – 3

Nájdite všetky prirodzené čísla, ktorých zápis neobsahuje nulu a má nasledujúcu vlastnosť: ak v ňom vynecháme ľubovoľnú číslicu, dostaneme číslo, ktoré je deliteľom pôvodného čísla.

(*Jaromír Šimša*)

C – I – 4

Daný je lichobežník $ABCD$ so základňami AB a CD. Označme E stred strany AB, F stred úsečky DE a G priesečník úsečiek BD a CE. Vyjadrite obsah lichobežníka $ABCD$ pomocou jeho výšky v a dĺžky d úsečky FG za predpokladu, že body A, F, C ležia na jednej priamke.

(*Ján Mazák*)

C – I – 5

Zistite, pre ktoré prirodzené číslo n je podiel

$$\frac{33\,000}{(n-4)(n+1)}$$

a) čo najväčšie, b) čo najmenšie prirodzené číslo. (*Eva Řídká*)

C – I – 6

Daný je ostrouhlý trojuholník ABC, v ktorom D je päta výšky z vrcholu C a V priesečník výšok. Dokážte, že $|AD| \cdot |BD| = |AB| \cdot |VD|$ práve vtedy, keď $|CD| = |AB|$. (*Jaroslav Zhouf*)

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta PEDAS Žilinskej univerzity, Univerzitná 1, 010 26 Žilina

56. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Leták kategórií A, B, C - I. kolo, domáca časť

Autori úloh: RNDr. Jiří Dula, RNDr. Petr Kaňovský, Mgr. Pavel Leischner, PhD., Ján Mazák, Prof. RNDr. Jozef Moravčík, CSc., Doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., Mgr. Peter Novotný, RNDr. Eva Řídká, Doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., RNDr. Jaroslav Zhouf, CSc.

Vydala IUVENTA s finančnou podporou Ministerstva školstva SR

Miesto a dátum vydania: Bratislava, august 2006

Náklad: 600

Sadzbu programom TEX pripravil Mgr. Peter Novotný

Zodpovedný redaktor: Doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.