SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY
Fakulta PEDaS Žilinskej univerzity, 010 26 Žilina

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

Kategórie A, B, C

55. ročník, školský rok 2005/2006

I. kolo (domáca časť)

Vážení žiaci stredných škôl,

Slovenská komisia matematickej olympiády vás pozýva zúčastniť sa 55. ročníka matematickej olympiády – súťaže pre žiakov stredných škôl v našej republike.

Kategória **A** je určená žiakom maturitných a predmaturitných ročníkov.
Kategória **B** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 2 roky.
Kategória **C** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako tri roky.
Pre žiakov prvých, prípravných ročníkov bilingválnych gymnázií je určená kategória **Z9**.

Organizácia súťaže v kategóriách **A, B, C**:

V **domácej časti I. kola** na vás čaká **6 úloh**, ktoré nájdete v tomto letáku. Ich riešenia (nie nutne všetkých úloh) odovzdajte svojmu učiteľovi matematiky do **25. novembra 2005** (kategória **A**) a do **16. januára 2006** (kategórie **B** a **C**). Ten ich opraví, ohodnotí podľa stupnice 1 – *výborne*, 2 – *dobre*, 3 – *nevyhovuje*. Potom ich s vami rozoberie, vysvetlí vám prípadné nedostatky a oboznámi vás so správnym riešením. Ak budú vaše riešenia aspoň štyroch úloh ohodnotené ako výborné alebo dobré, budete pozvaní do **školskej časti I. kola**. Tam budete v stanovenom čase samostatne riešiť ďalšie tri úlohy. Opravené riešenia školského aj domáceho kola úspešných riešiteľov školského kola potom váš učiteľ matematiky pošle na príslušnú krajskú komisiu MO. Tá na základe výsledkov pozve najlepších účastníkov školského kola do **II. kola**, v ktorom budú v priebehu štyroch hodín samostatne riešiť štyri úlohy. V kategóriách **B** a **C** tým súťaž končí. O poradí v druhých kolách rozhoduje súčet bodov získaných za jednotlivé úlohy. Pokiaľ prvých n žiakov dosiahne rovnaký počet bodov, je poradie označené zhodne prvým až n-tým miestom. Podobne pre poradie na ďalších miestach. Žiadne iné kritériá nie sú prípustné.

V kategórii **A** budú ešte najlepší riešitelia II. kola z celej republiky súťažiť v **III. kole**, celoštátnom, kde budú dva dni (po 4,5 hodinách) riešiť dve trojice úloh. Najviac polovica účastníkov tohto kola bude vyhlásená za úspešných riešiteľov a najviac štvrtina za víťazov 55. ročníka v kategórii **A**. Z víťazov III. kola sa vyberá družstvo Slovenskej republiky na Medzinárodnú matematickú olympiádu a na medzištátne stretnutie s Českou republikou a Poľskom.

Termíny 55. ročníka matematickej olympiády:

	I. kolo (školská časť)	II. kolo (krajské)	III. kolo (celoštátne)
Kategória A	06. 12. 2005	24. 01. 2006	???
Kategórie B, C	26. 01. 2006	21. 03. 2006	—

Matematickú olympiádu vyhlasuje *Ministerstvo školstva SR* v spolupráci s *Jednotou slovenských matematikov a fyzikov* a *Slovenskou komisiou matematickej olympiády*. Súťaž riadi *Slovenská komisia MO* a v krajoch ju riadia *krajské komisie MO* pri pobočkách JSMF. Na jednotlivých školách ju zaisťujú učitelia matematiky. Vy sa obracajte na svojho učiteľa matematiky. Celoštátne kolo MO, tlač materiálov MO a ich distribúciu po organizačnej stránke zabezpečuje IUVENTA Bratislava v tesnej súčinnosti so Slovenskou komisiou matematickej olympiády.

Riešenia súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

Emil Kruh
I.C, Gymnázium L. Eulera
Okrúhle nám. 5, 940 01 Nové Zámky
Kraj Nitra
2003/2004
C – I – 3

Posledný údaj je označenie úlohy podľa tohto letáka. Zadania úloh nemusíte opisovať. Ak sa vám riešenie nezmestí na jeden list, uveďte na ďalších listoch vľavo hore svoje meno a označenie úlohy a strany očíslujte. **Riešenie píšte ako výklad, v ktorom sú uvedené všetky podstatné úvahy tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup.**

Veľa radosti z úspešného riešenia úloh vám všetkým praje

Doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.
predseda Slovenskej komisie MO

Archív zadaní a riešení úloh MO nájdete na internetových stránkach:

http://www.iuventa.sk
http://pppnnn.webpark.sk/mo.htm
http://matematika.webpark.sk

Radi by sme upozornili učiteľov a žiakov na Korešpondenčný matematický seminár (KMS) organizovaný združením Trojsten. Táto súťaž je veľmi efektívnou formou prípravy na MO a tiež zdokonaľovania sa v matematickom myslení ako takom. K tomu prispievajú aj záverečné sústredenia pre najlepších riešiteľov. Pre riešiteľov MO kategórií B a C je v KMS určená kategória ALFA. Pre lepších a skúsenejších z kategórie B a pre kategóriu A je v KMS určená kategória BETA. A nakoniec pre tých, čo majú ambície uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je v KMS určená kategória GAMA. Viac informácií o KMS nájdete v priloženom samostatnom letáku.

Na ďalšiu spoluprácu sa teší

Martin Potočný

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

55. ročník Školský rok 2005 / 2006 I. kolo (domáca časť)

****

KATEGÓRIA A

A – I – 1

V obore reálnych čísel riešte rovnicu

$$\sqrt{2}(\sin t + \cos t) = \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t.$$

(*J. Švrček*)

A – I – 2

Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník s navzájom kolmými uhlopriečkami. Označme postupne p, q kolmice z bodov D, C na priamku AB. Ďalej označme X priesečník priamok AC a p a Y priesečník priamok BD a q. Dokážte, že $XYCD$ je kosoštvorec alebo štvorec. (*E. Kováč*)

A – I – 3

Postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *nenulových* celých čísel má tú vlastnosť, že pre každé $n \geq 0$ platí $a_{n+1} = a_n - b_n$, kde b_n je číslo, ktoré má rovnaké znamienko ako číslo a_n, ale opačné poradie číslic (zápis čísla b_n môže na rozdiel od zápisu čísla a_n začínať jednou alebo viacerými nulami). Napríklad pre $a_0 = 1\,210$ je $a_1 = 1\,089$, $a_2 = -8\,712$, $a_3 = -6\,534, \ldots$

a) Dokážte, že postupnosť (a_n) je periodická.

b) Zistite, aké najmenšie prirodzené číslo môže byť a_0. (*T. Jurík*)

A – I – 4

Nájdite všetky kubické mnohočleny $P(x)$, ktoré majú aspoň dva rôzne reálne korene, z ktorých jeden je číslo 7, a ktoré pre každé reálne číslo t spĺňajú podmienku: Ak $P(t) = 0$, tak $P(t+1) = 1$. (*P. Novotný*)

A – I – 5

Dané sú úsečky dĺžok a, b, c, d. Dokážte, že rovnosť $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ platí práve vtedy, keď existujú konvexné štvoruholníky so stranami dĺžok a, b, c, d (pri zvyčajnom označení), pričom uhlopriečky každého takého štvoruholníka zvierajú jeden a ten istý uhol. (*J. Šimša*)

A – I – 6

Nájdite všetky usporiadané dvojice (x, y) prirodzených čísel, pre ktoré platí

$$x^2 + y^2 = 2005(x - y).$$

(*J. Moravčík*)

KATEGÓRIA B

B – I – 1

Určte všetky hodnoty celočíselného parametra a, pre ktoré má rovnica

$$(x+a)(x+2a)=3a$$

aspoň jeden celočíselný koreň. (*J. Zhouf*)

B – I – 2

V danom trojuholníku ABC označme D ten bod polpriamky CA, pre ktorý platí $|CD|=|CB|$. Ďalej označme postupne E, F stredy úsečiek AD a BC. Dokážte, že $|\sphericalangle BAC|=2|\sphericalangle CEF|$ práve vtedy, keď $|AB|=|BC|$. (*P. Leischner*)

B – I – 3

Rozhodnite, či nerovnosť

$$a(b+1)+b(c+1)+c(d+1)+d(a+1)\geq \tfrac{1}{2}(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)$$

platí pre všetky také kladné čísla a, b, c, d, ktoré spĺňajú podmienku

a) $ab=cd=1$;

b) $ac=bd=1$. (*J. Šimša*)

B – I – 4

Každú z hviezdičiek v zápisoch dvanásťmiestnych čísel $A = {*}88\,888\,888\,888$, $B = {*}11\,111\,111\,111$ nahraďte nejakou číslicou tak, aby výraz $|14A-13B|$ mal čo najmenšiu hodnotu. (*J. Šimša*)

B – I – 5

Kruh so stredom S a polomerom r je rozdelený na štyri časti dvoma tetivami, z ktorých jedna má dĺžku r a druhá má od stredu S vzdialenosť $r/2$. Dokážte, že absolútna hodnota rozdielu obsahov tých dvoch častí, ktoré majú spoločný práve jeden bod a pritom žiadna z nich neobsahuje stred S, je rovná jednej šestine obsahu kruhu. (*P. Leischner*)

B – I – 6

Určte najmenšie prirodzené číslo n s nasledujúcou vlastnosťou: Keď zvolíme n rôznych prirodzených čísel menších ako 2 005, sú medzi nimi dve také, že podiel súčtu a rozdielu ich druhých mocnín je väčší ako tri. (*J. Zhouf*)

M A T E M A T I C K Á   O L Y M P I Á D A

55. ročník   Školský rok 2005 / 2006   I. kolo (domáca časť)

****

KATEGÓRIA C

C – I – 1

a) Dokážte, že pre každé prirodzené číslo m je rozdiel $m^6 - m^2$ deliteľný číslom 60.
b) Určte všetky prirodzené čísla m, pre ktoré je rozdiel $m^6 - m^2$ deliteľný číslom 120.

(*J. Moravčík*)

C – I – 2

Kružnice k, ℓ, m sa po dvoch zvonka dotýkajú a všetky tri majú spoločnú dotyčnicu. Polomery kružníc k, ℓ sú 3 cm a 12 cm. Vypočítajte polomer kružnice m. Nájdite všetky riešenia.

(*L. Boček*)

C – I – 3

Určte počet všetkých trojíc navzájom rôznych trojmiestnych prirodzených čísel, ktorých súčet je deliteľný každým z troch sčítaných čísel. (*J. Šimša*)

C – I – 4

Je dané prirodzené číslo n $(n \geq 2)$ a reálne čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pre ktoré platí

$$x_1x_2 = x_2x_3 = \ldots = x_{n-1}x_n = x_nx_1 = 1.$$

Dokážte, že

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq n.$$

(*J. Švrček*)

C – I – 5

V ostrouhlom trojuholníku ABC označme D pätu výšky z vrcholu C a P, Q zodpovedajúce päty kolmíc vedených bodom D na strany AC a BC. Obsahy trojuholníkov ADP, DCP, DBQ, CDQ označme postupne S_1, S_2, S_3, S_4. Vypočítajte $S_1 : S_3$, ak $S_1 : S_2 = 2 : 3$ a $S_3 : S_4 = 3 : 8$.

(*P. Novotný*)

C – I – 6

Rozhodnite, ktoré z čísel

$$\sqrt{p + \sqrt{q}} + \sqrt{q + \sqrt{p}}, \quad \sqrt{p + \sqrt{p}} + \sqrt{q + \sqrt{q}}$$

je väčšie, ak p a q sú rôzne kladné čísla. (*J. Moravčík*)

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta PEDaS Žilinskej univerzity, 010 26 Žilina

55. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Leták kategórií A, B, C - I. kolo, domáca časť

Autori úloh: Doc. RNDr. Leo Boček, CSc., Mgr. Tomáš Jurík, Mgr. Eugen Kováč,
Mgr. Pavel Leischner, Prof. RNDr. Jozef Moravčík, CSc.,
Doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., Doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.,
RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., RNDr. Jaroslav Zhouf, CSc.

Vydala IUVENTA s finančnou podporou Ministerstva školstva SR

Miesto a dátum vydania: Bratislava, august 2005

Náklad: 600

Sadzbu programom TEX pripravil Mgr. Peter Novotný

Zodpovedný redaktor: Doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.