

Slovenská komisia matematickej olympiády
Fakulta PEDaS Žilinskej univerzity, 010 26 Žilina

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA



pre žiakov základných škôl

a nižších ročníkov osemročných gymnázií

55. ročník, školský rok 2005/2006

I. kolo (domáca časť)

Milí žiaci,

máte radi zaujímavé matematické úlohy a chceli by ste si zasúťažiť v ich riešení? Ak áno, zúčastnite sa Matematickej olympiády (MO). Súťaž je dobrovoľná a nesúvisí s klasifikáciou z matematiky. Matematická olympiáda má niekoľko kategórií. V tomto letáku nájdete úlohy, ktoré sú určené žiakom základných škôl (ZŠ) a prvých štyroch ročníkov osemročných gymnázií (OG).

Kategória **Z9** je určená pre žiakov 9. ročníka ZŠ, 4. ročníka OG a 1. ročníka bilingválnych gymnázií.

Kategória **Z8** je určená len pre žiakov 8. ročníka ZŠ .

Kategória **Z7** je určená pre žiakov 7. ročníka ZŠ a 3. ročníka OG.

Kategória **Z6** je určená pre žiakov 6. ročníka ZŠ a 2. ročníka OG.

Kategória **Z5** je určená pre žiakov 5. ročníka ZŠ a 1. ročníka OG.

Kategória **Z4** je určená pre žiakov 4. ročníka ZŠ.

So súhlasom svojho učiteľa matematiky môžete súťažiť aj v niektorej kategórii určenej pre vyšší ročník (aj v kategórii Z8), alebo v kategóriách **A**, **B**, **C** alebo **P**, ktoré sú určené pre žiakov stredných škôl (úlohy sú uverejnené v letákoch MO pre stredné školy).

Priebeh súťaže

Kategória Z4 pozostáva z domáceho a školského kola, kategórie Z5, Z6, Z7, Z8 z domáceho a okresného kola, kategória Z9 z domáceho, okresného a krajského kola.

V rámci domáceho kola riešite 6 úloh, ktoré sú v tomto letáku. **Riešenia úloh odovzdajte svojim učiteľom matematiky najneskôr v týchto termínoch:**

kategória	jedna trojica úloh	druhá trojica úloh
Z4, Z5, Z9	3. november 2005	14. december 2005
Z6, Z7, Z8	1. december 2005	24. február 2006

Vaši učitelia vám riešenia opravujú a ohodnotia podľa stupnice: 1 - *výborne*, 2 - *dobré*, 3 - *nevyhovuje*.

Úspešným riešiteľom domáceho kola sa stáva žiak, ktorý bude mať ohodnotenú aspoň štyri úlohy stupňom aspoň *dobré*. Práce všetkých úspešných riešiteľov kategórií Z5 - Z9 zašle vaša škola okresnej komisii MO. Tá z nich vyberie najlepších riešiteľov a pozve ich do okresného kola. V rámci neho riešite úlohy podobného rázu ako v domácom kole, avšak klauzúrne, to znamená, že nemôžete využívať cudziu pomoc a na riešenie máte k dispozícii obmedzený čas, (2 hodiny v kategóriách Z5, Z6, Z7, Z8, - 4 hodiny v kategórii Z9).

V kategórii Z4 sa úspešní riešitelia domáceho kola zúčastnia školského klauzúrneho kola. Najlepší riešitelia okresného kola kategórie Z9 budú pozvaní do krajského kola.

Termíny 55. ročníka Matematickej olympiády:

kategória	II. kolo	III. kolo
Z4	25. január 2006	-----
Z5	25. január 2006	-----
Z6-Z8	5. apríl 2006	-----
Z9	25. január 2006	22. marec 2006

Pokyny a rady súťažiacim

Riešenie súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

Jozef Plachý, 7.C ZŠ Hodžova ul. 5, 949 01 Nitra Úloha Z7-I-2

Riešenie píšete tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup, podrobne vysvetlite, ako ste uvažovali. Uvedomte si, že sa hodnotí nielen výsledok, ku ktorému ste došli, ale hlavne správnosť úvah, ktoré k nemu viedli. Práce, ktoré nebudú spĺňať tieto podmienky, alebo budú odovzdané po termíne, nebudú do súťaže prijaté.

Veľa radosti z úspešného riešenia úloh MO prajú

RNDr. Monika Dillingerová, PhD.
SK MO, vedúca sekcie Z

doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.
predseda SK MO

Archív zadaní a riešení úloh MO nájdete na internetových stránkach:

<http://www.iuventa.sk>

<http://pppnnn.webpark.sk/mo.htm>

<http://matematika.webpark.sk>

Kategória Z4

Z4-I-1

Jurko rád kreslí autíčka. V pondelok namaľoval niekoľko autíčok, v utorok ich namaľoval trikrát toľko ako v pondelok, ale potom 12 pondelkových vygumoval. V stredu mal zlú náladu, nič nenamaľoval a ešte roztrhal polovicu utorkových, čiže 24. Koľko autíčok namaľoval v utorok? Koľko autíčok namaľoval v pondelok, v utorok a v stredu spolu?

(M. Dillingerová)

Z4-I-2

Z čísla 9 635 347 vyškrtni niekoľko číslic tak, aby vzniklo čo najväčšie číslo a súčet všetkých jeho číslic bol menší ako 20.

(M. Dillingerová)

Z4-I-3

Rozprávkový nafukovací štvorec, ktorý vie rozprávať, mal pred 5 minútami dĺžku strany 8 cm. Pri každom klamstve zväčší svoj obvod dvojnásobne. Pri každej vyslovenej pravde sa zmenší dĺžka každej jeho strany o 2 cm. Za posledných 5 minút 2-krát klamal a 2-krát hovoril pravdu.

- Aký najväčší obvod môže mať teraz?
- Aký najmenší obvod môže mať teraz?

(S. Bodláková)

Z4-I-4

Peter má na papier napísať z čísel od 1 do 200 všetky také, ktoré sa dajú deliť piatimi bezo zvyšku, ale nedajú sa deliť bezo zvyšku siedmimi. Pavol má vypísať z čísel od 1 do 200 všetky také, ktoré po delení siedmimi dávajú zvyšok 5. Koľko čísel má napísať Peter a koľko Pavol?

(M. Smitková)

Z4-I-5

Žabka Rosnička stála na rebríku, ktorý mal 5 priečok, na tretej priečke. Urobila šesť skokov a zostala stáť na piatej priečke. Vypíš všetky možnosti, ako mohla Rosnička skákať, ak vždy skočila len o jednu priečku hore alebo o jednu priečku dole.

(S. Bodláková)

Z4-I-6

Majka má v stavebnici len rovnako veľké kocky s hranou dĺžky 3 cm. Keď z nich postaví vežu, ktorá má na každom podlaží 4 kocky, bude mať veža výšku 54 cm. Aká vysoká by bola iná veža z takého istého počtu rovnakých kociek, ktorá by mala v každom podlaží deväť kociek?

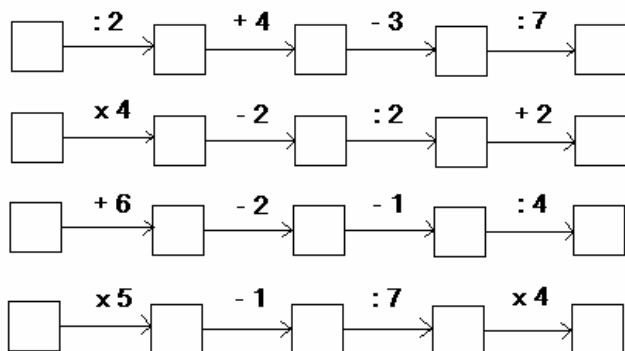
(M. Dillingerová)

Kategória Z5

Z5-I-1

Doplň do prázdnych políčkoch prirodzené čísla od 1 do 20 (každé číslo môžeš použiť len raz) tak, aby platili matematické vzťahy.

(M. Smitková)



Z5-I-2

Blcha Skákalka skáče po vodorovnej číselnej osi. Vie robiť iba skoky dvoch dĺžok. Jedným preskočí o 14 doprava alebo doľava, druhým preskočí o 18 doprava alebo doľava. Práve stojí na čísle 2.

- Nájdí spôsob, ako má skákať, aby sa štyrmi skokmi dostala na číslo 10.
- Tvrdí, že včera bola na čísle 13. Hovorí pravdu alebo klame? Zdôvodni.

(M. Dillingerová)

Z5-I-3

Rozprávkový nafukovací štvorec, ktorý vie rozprávať, mal pred 5 minútami dĺžku strany 8cm. Pri každom klamstve zväčší svoj obvod dvojnásobne. Pri každej vyslovenej pravde sa zmenší dĺžka každej jeho strany o 2 cm. Za posledných 5 minút 2-krát klamal a 2-krát hovoril pravdu.

- Aký najväčší obvod môže mať teraz?
- Aký najmenší obvod môže mať teraz?

(S. Bodláková)

Z5-I-4

Peťo si kúpil na jarmoku 4 autíčka, biele, zelené, červené a modré. Biele autíčko stálo dvakrát toľko ako červené, zelené trikrát toľko ako biele a za modré zaplatil toľko ako za červené a biele spolu. Pritom červené stálo o 70 Sk menej ako zelené. Koľko Sk stáli jednotlivé autíčka?

(Š. Ptáčková)

Z5-I-5

Mama stonožka má dve deti a manžela. Každý z nich má sto nôh a každý člen rodiny si berie každý deň čisté ponožky. V sobotu ráno o 6:00 začala mamička stonožka prať špinavé ponožky. Naraz sa jej ich do práčky zmestí 357 a jedna várka sa operie za dve a pol hodiny. Zisti, kedy skončí s praním, ak vieš, že ponožky perie raz za týždeň, uloženie ponožiek do práčky jej trvá 2 minúty a ich vybratie z práčky 3 minúty.

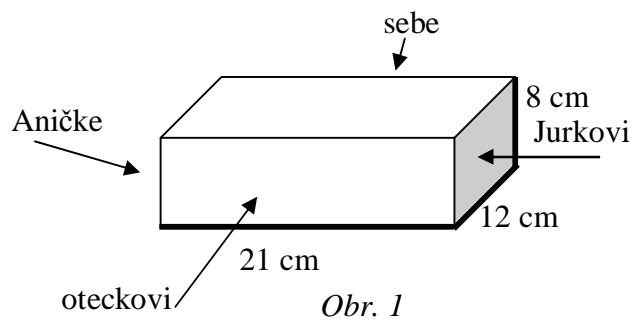
(S. Bednářová)

Z5-I-6

Mamička má v chladničke tehlu syra (obr. 1). Postupne z nej odrezáva 1 cm hrubé plátky na vyprážanie. Najprv odrezala spredu plátok s rozmermi pre otecka, potom odrezala z boku pre

Jurka, zozadu pre seba a nakoniec z druhého boku pre Aničku. Napíš, aké rozmery majú jednotlivé plátky. Urči rozmery zvyšku syra.

(M. Dillingerová)

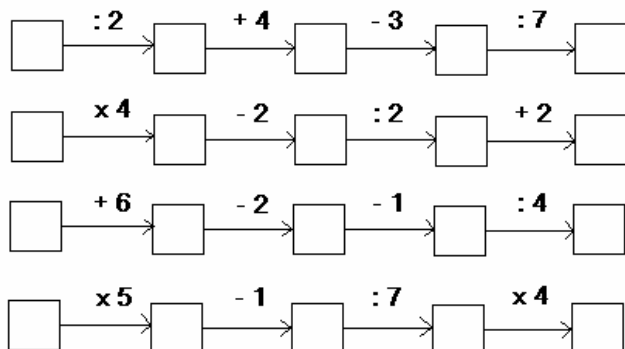


Kategória Z6

Z6-I-1

Doplňte do prázdnych políček prirodzené čísla od 1 do 20 (každé číslo môžete použiť len raz) tak, aby platili matematické vzťahy.

(M. Smitková)



Z6-I-2

Snehulienka so siedmimi trpaslíkmi zbierali lieskové oriešky. Snehulienka ich mala toľko ako všetci trpaslíci spolu. Keď sa vracali domov, stretli veveričku Finku. Snehulienka aj každý trpaslík jej dali rovnaký počet orieškov. Doma trpaslíci a Snehulienka vysypali oriešky na kôpky na stole, každý na inú kôpku a Vedko zapísal počty orieškov v kôpkach: 120, 316, 202, 185, 333, 297, 111 a 1672. Koľko orieškov dostala veverička Finka?

(L. Hozová)

Z6-I-3

Keď sme čísla 80 a 139 vydělili tým istým prirodzeným číslom, získali sme zvyšky 8 a 13. Ktorým číslom sme delili?

(M. Volfová)

Z6-I-4

Obvod trojuholníka je 16 cm. Aké môžu byť dĺžky jeho strán, keď sú to prirodzené čísla a súčet dĺžok dvoch strán je o 6 cm väčší ako dĺžka tretej strany?

(L. Hozová)

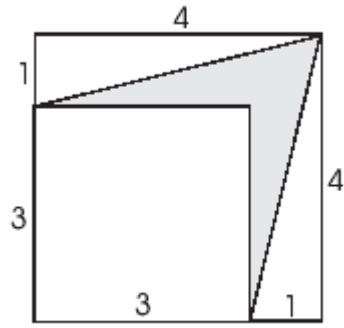
Z6-I-5

Maruška dostala päť rôzne ťažkých koláčov. Priemerná hmotnosť koláča bola 200 gramov. Maruška jeden koláč zjedla a priemerná hmotnosť zvyšných koláčov potom bola 160 gramov. Koľko gramov vážil koláč, ktorý Maruška zjedla?

(B. Šťastná)

Z6-I-6

Určte veľkosť plochy šedého štvoruholníka na obrázku 1, kde všetky rozmery sú udávané v centimetroch.



Obr. 1

(P. Tlustý)

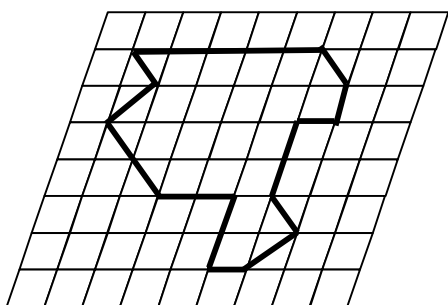
Kategória Z7

Z7-I-1

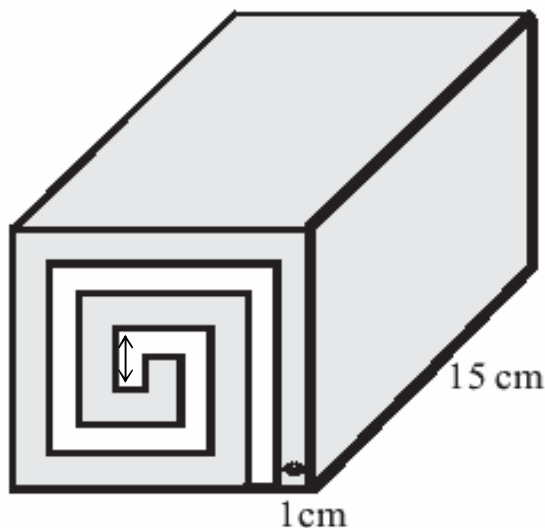
Pat a Mat upravovali nový asfalt na ceste. Najprv išli s valcom 10 m dopredu, potom 7 m cúvli, opäť prešli 10 m dopredu a 7 m cúvli... Takto pokračovali, až kým po prvý raz nezišli z nového asfaltu.

- Koľko metrov najazdil valec na novom 540 metrovom úseku cesty?
- Koľkokrát prešli po devätnástom metri nového asfaltu?

(M. Dillingerová)



Obr. 1



Obr. 2

Z7-I-2

Zistite obsah a veľkosti všetkých vnútorných uhlov mnohoúhelníka znázorneného v kosoštvorcovej sieti na obrázku 1, ak viete, že priamky siete zvierajú uhol 80 stupňov a jeden malý kosoštvorček má obsah 1 cm^2 . (Pozor, obrázok je nepresný, neoplatí sa merať.)

(S. Bednářová)

Z7-I-3

Na obrázku 2 vidíte špeciálny druh rolády, tzv. KVADRILÁDU. Je vyrobená z bielej a hnedej marcipánovej hmoty, pričom obe hmoty majú rovnakú hrúbku 1 cm. Celá kvadriláda má dĺžku 15 cm. Predáva sa rozkrájaná na 10 rovnakých plátkov, pričom sa krája rovnobežne s prednou stenou. Zistite

- rozmery jedného plátku,
- koľko gramov hnedej hmoty a koľko gramov bielej hmoty treba na jej prípravu, ak viete, že jeden cm^3 marcipánovej hmoty váži 2 gramy.

(Neoznačená šípka v obrázku má dĺžku 2 cm.)

(S. Bednářová)

Z7-I-4

Nájdite všetky päťciferné čísla, ktoré sa škrtnutím prvej a poslednej cifry zmenšia 250-krát.

(L. Šimůnek)

Z7-I-5

Pavol dostal na domácu úlohu vyjadriť desatinným číslom zlomky $\frac{3}{7}$ a $\frac{7}{13}$. Aby urobil pani učiteľke radosť, písal úlohu miesto do zošita na latky školského plotu. Najprv vyjadroval $\frac{3}{7}$, teda na prvú latku navrch napísal 0, na druhú desatinnú čiarku, na tretiu 4 atď. Keď skončil, napísal pod tieto čísla vyjadrenie zlomku $\frac{7}{13}$. Na prvú latku dole napísal 0, na druhú desatinnú čiarku, na tretiu 5 atď. Koľko bolo latiek na plote, ak viete, že číslicu 5 napísal presne 667 krát a že na 668 latkách bola dvojica rovnakých čísel.

(M. Dillingerová, P. Tlustý)

Z7-I-6

V Kocúrkove majú dve zmenárne. V súčasnosti majú takéto kurzy:

1. zmenáreň			2. zmenáreň		
mena	nákup	predaj	mena	nákup	predaj
1euro	123Kk	132Kk	1euro	143Kk	154Kk

Slavo Špakulatý mal niekoľko **euro**. V 2. zmenárni ich zamenil za Kocúrkovské koruny (Kk) a tie potom zamenil v 1. zmenárni späť na **euro**. Takto zarobil 1 **euro**. Koľko **euro** mal na začiatku?

(S. Bednářová)

Kategória Z8

Z8-I-1

Určte všetky dvojciferného čísla, pre ktoré súčin ciferného súčtu a ciferného súčinu je 126.

(M. Raabová)

Z8-I-2

Pani Zručná sa uchádzala o miesto vo výrobe vianočných perníkov. Pri pohovore s vedúcim chcela povedať, koľko perníkov ozdobí za koľko minút. Bola nervózna, a preto omylom prehodila počet minút s počtom perníkov. Vedúci podľa jej údajov vypočítal, koľko perníkov by mala pani Zručná stihnúť ozdobiť za päťhodinovú pracovnú dobu, a presne tento počet jej dal za úlohu ozdobiť. Pani Zručnej trvala práca o 2 hodiny a 12 minút dlhšie. Koľko perníkov ozdobila?

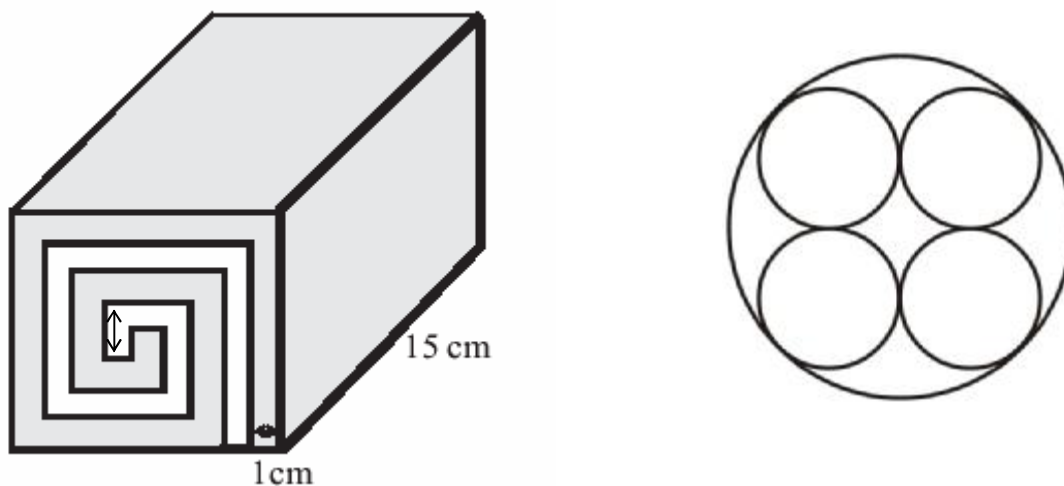
(L. Šimůnek)

Z8-I-3

Na obrázku 1 vidíte špeciálny druh rolády, tzv. KVADRILÁDU. Je vyrobená z bielej a hnedej marcipánovej hmoty, pričom obe hmoty majú rovnakú hrúbku 1 cm. Celá kvadriláda má dĺžku 15 cm. Predáva sa rozkrájaná na 10 rovnakých plátkov, pričom sa krája rovnobežne s prednou stenou. Zistite

- rozmiery jedného plátku,
 - koľko gramov hnedej hmoty a koľko gramov bielej hmoty treba na jej prípravu, ak viete, že jeden cm^3 marcipánovej hmoty váži 2 gramy.
- (Neoznačená šípka v obrázku má dĺžku 2 cm.)

(S. Bednářová)



Obr. 1

Z8-I-4

Roman písal na papier za sebou celé čísla tak, že nasledujúce získal z predchádzajúceho striedavo násobením dvoma a odčítaním troch. Napr. postupnosť čísel 1; 2; -1; -2; -5; -10 vyhovuje jeho pravidlu, ale postupnosť 10; 7; 4; 8; 16; 32 jeho pravidlo nespĺňa. Po chvíli sčítal posledných 5 čísel, ktoré napísal a vyšlo mu 114. Ktorých 5 čísel sčítal?

(M. Raabová)

Z8-I-5

Určte polomer väčšej kružnice na obrázku 2, ak každá malá kružnica má polomer 1 cm.

(P. Tlustý)

Z8-I-6

Jakub má tento školský rok priemer všetkých svojich známok 1,85. Za celý školský rok dostal iba štyri päťorky a práve tretina jeho známok boli jednotky. Najmenej koľko známok musel tento školský rok dostať?

(L. Šimůnek)

Kategória Z9

Z9-I-1

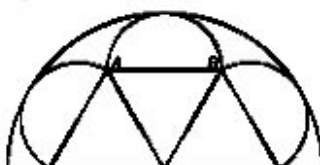
Určte počet trojciferných prirodzených čísel, ktoré majú práve dve rovnaké cifry.

(P. Tlustý)

Z9-I-2

Na obrázku 1 sú tri rovnostranné trojuholníky, jedna veľká polkružnica s polomerom 1 dm a tri malé polkružnice. Určte dĺžku úsečky AB .

(P. Tlustý)



Z9-I-3

V súradnicovej sústave sme znázornili body $A[3,2]$, $B[-1,1]$, $C[-2,4]$ a ich obrazy A', B', C' v stredovej súmernosti so stredom v začiatku súradnicovej sústavy. Vypočítajte obsah šesťuholníka $ABCA'B'C'$.

(S. Bednářová)

Z9-I-4

Starý podnikateľ zomrel a zanechal po sebe dva účty, jeden dlh a testament. V testamente sa písalo, že peniaze z prvého účtu si majú rozdeliť 1. a 2. syn v pomere 1:2, peniaze z druhého účtu 1. a 3. syn v pomere 1:3 a dlh majú zaplatiť 2. a 3. syn v pomere 2:3. Zistite, koľko Sk bolo na jednotlivých účtoch a aký dlh museli synovia splatiť, ak viete, že v konečnom dôsledku každý z nich získal 123456 Sk.

(S. Bednářová)

Z9-I-5

Dva rovnostranné papierové trojuholníky, z ktorých menší má obsah 60 cm^2 , sme položili cez seba tak, že ich prienikom bol pravouhlý trojuholník s obsahom 30 cm^2 . Aký najmenší obsah mohol mať väčší z rovnostranných trojuholníkov?

(S. Bednářová)

Z9-I-6

Zadanie písomnej práce obsahovalo 26 otázok, ktoré boli rozdelené podľa obtiažnosti do troch skupín. V prvej skupine bola správna odpoveď hodnotená tromi bodmi, v druhej piatimi bodmi a v tretej ôsmimi bodmi. Maximálny možný počet získaných bodov bol 111. Koľko otázok mohlo byť v každej skupine?

(L. Šimůnek)

Na ukážku uvádzame **vzorové riešenie** jednej úlohy zo staršej olympiády:

Úloha Z8-II-1.

Daný je obdĺžnik s celočíselnými dĺžkami strán. Ak zväčšíme jednu jeho stranu o 4 a druhú zmenšíme o 5, dostaneme obdĺžnik s dvojnásobným obsahom. Určte strany daného obdĺžnika. Nájdite všetky možnosti.

Riešenie. Dĺžky strán obdĺžnika označíme a , b . Nový obdĺžnik má dĺžky strán $a + 4$, $b - 5$. Podľa podmienky úlohy pre obsahy oboch obdĺžnikov platí:

$$2ab = (a + 4)(b - 5).$$

Postupne upravíme: $ab - 4b + 5a = -20$

$$ab - 4b + 5a - 20 = -40$$

Odčítali sme 20, aby sme mohli ľavú stranu upraviť na súčin:

$$(a - 4)(b + 5) = -40.$$

Riešenie nájdeme rozkladom čísla -40 na dva činitele. Pritom musí byť $a > 0$, $b > 0$, a teda $a - 4 > -4$, $b + 5 > 5$.

Sú dve také možnosti: $(-2).20 = -40$ a $(-1).40 = -40$.

V prvom prípade dostaneme obdĺžnik o stranách $a = 2$, $b = 15$ s obsahom $S = 30$. Nový obdĺžnik má potom strany $a' = 6$, $b' = 10$ a obsah $S' = 60$, t.j. $S' = 2S$.

V druhom prípade dostaneme obdĺžnik so stranami $a = 3$, $b = 35$ s obsahom $S = 105$. Nový obdĺžnik má potom strany $a' = 7$, $b' = 30$ a obsah $S' = 210 = 2S$.

Úloha má teda dve riešenia. Daný obdĺžnik môže mať strany buď 2 a 15 alebo 3 a 35.

Na záver jedna rada:

Úlohy nie sú ľahké. Nenechajte sa odradiť, keď neobjavíte hneď riešenie. Experimentujte, kreslite si, „hrajte sa“ s úlohou. Niekedy pomôže pozrieť sa do nejakej knižky, kde nájdete podobné úlohy vyriešené, inokedy sa môže stať, že zrazu o tri dni „z ničoho nič“ na riešenie prídete.

Súťaž vyhlasuje Ministerstvo školstva SR spolu s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov. Súťaž riadi Slovenská komisia MO, v jednotlivých okresoch okresné komisie MO. Na jednotlivých školách súťaž zaisťujú učitelia matematiky.

Vy sa vždy obracajte na svojho učiteľa matematiky.

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta PEDaS Žilinskej univerzity, 010 26 Žilina

55. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Leták kategórií Z4 - Z9, I. kolo, domáca časť

Autori úloh: PaedDr. S. Bednářová, PhD., Mgr. S. Bodláková,
RNDr. M. Dillingerová, PhD., doc. RNDr. L. Hozová, CSc., Mgr. Š. Ptáčková,
Mgr. M. Raabová, Mgr. M. Smitková, L. Šimůnek, Mgr. B. Šťastná,
doc. RNDr. P. Tlustý, CSc., doc. RNDr. M. Volfová, PhD.

Vydala IUVENTA s finančnou podporou Ministerstva školstva SR

Miesto a rok vydania: Bratislava, 2005

Náklad: 1000 výtlačkov

Neprešlo jazykovou úpravou

Grafická úprava: Mgr. I. Slobodová

Zodpovedný redaktor: Doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.

© Slovenská komisia Matematickej olympiády, 2005