SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY
Fakulta PEDaS Žilinskej univerzity, 010 26 Žilina

M A T E M A T I C K Á O L Y M P I Á D A

N A S T R E D N Ý C H Š K O L Á C H

Kategórie A, B, C

54. ročník, školský rok 2004 / 2005

I. kolo (domáca časť)

Vážení žiaci stredných škôl,

Slovenská komisia matematickej olympiády vás pozýva zúčastniť sa 54. ročníka matematickej olympiády – súťaže pre žiakov stredných škôl v našej republike.

Kategória **A** je určená žiakom maturitných a predmaturitných ročníkov.

Kategória **B** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 2 roky.

Kategória **C** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako tri roky.

Pre žiakov prvých, prípravných ročníkov bilingválnych gymnázií je určená kategória **Z9**.

Organizácia súťaže v kategóriách **A**, **B**, **C**:

V **domácej časti I. kola** na vás čaká **6 úloh**, ktoré nájdete v tomto letáku. Ich riešenia (nie nutne všetkých úloh) odovzdajte svojmu učiteľovi matematiky do **26. novembra 2004** (kategória **A**) a do **14. januára 2005** (kategórie **B** a **C**). Ten ich opraví, ohodnotí podľa stupnice 1 – *výborne*, 2 – *dobre*, 3 – *nevyhovuje*. Potom ich s vami rozoberie, vysvetlí vám prípadné nedostatky a oboznámi vás so správnym riešením. Ak budú vaše riešenia aspoň štyroch úloh ohodnotené ako výborné alebo dobré, budete pozvaní do **školskej časti I. kola**. Tam budete v stanovenom čase samostatne riešiť ďalšie tri úlohy. Opravené riešenia školského aj domáceho kola úspešných riešiteľov školského kola potom váš učiteľ matematiky pošle na príslušnú krajskú komisiu MO. Tá na základe výsledkov pozve najlepších účastníkov školského kola do **II. kola**, v ktorom budú v priebehu štyroch hodín samostatne riešiť štyri úlohy. V kategóriách **B** a **C** tým súťaž končí. O poradí v druhých kolách rozhoduje súčet bodov získaných za jednotlivé úlohy. Pokiaľ prvých n žiakov dosiahne rovnaký počet bodov, je poradie označené zhodne prvým až n-tým miestom. Podobne pre poradie na ďalších miestach. Žiadne iné kritériá nie sú prípustné.

V kategórii **A** budú ešte najlepší riešitelia II. kola z celej republiky súťažiť v **III. kole**, celoštátnom, kde budú dva dni (po 4,5 hodinách) riešiť dve trojice úloh. Najviac polovica účastníkov tohto kola bude vyhlásená za úspešných riešiteľov a najviac štvrtina za víťazov 54. ročníka v kategórii **A**. Z víťazov III. kola sa vyberá družstvo Slovenskej republiky na Medzinárodnú matematickú olympiádu a na medzištátne stretnutie s Českou republikou a Poľskom.

Termíny 54. ročníka matematickej olympiády:

kategória	I. kolo (školská časť)	II. kolo (krajské)	III. kolo (celoštátne)
Kategória A	7. 12. 2004	18. 1. 2005	3. – 6. 4. 2005
Kategórie B, C	25. 1. 2005	22. 3. 2005	-----

Matematickú olympiádu vyhlasuje *Ministerstvo školstva SR* v spolupráci s *Jednotou slovenských matematikov a fyzikov* a *Slovenskou komisiou matematickej olympiády*. Súťaž riadi *Slovenská komisia MO* a v krajoch ju riadia *krajské komisie MO* pri pobočkách JSMF. Na jednotlivých školách ju zaisťujú učitelia matematiky. Vy sa obracajte na svojho učiteľa matematiky. Celoštátne kolo MO, tlač materiálov MO a ich distribúciu po organizačnej stránke zabezpečuje IUVENTA v tesnej súčinnosti so Slovenskou komisiou matematickej olympiády.

Riešenia súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

Emil Kruh
I.C, Gymnázium L. Eulera
Okrúhle nám. 5, 940 01 Nové Zámky
Kraj Nitra
2004/2005
C – I – 3

Posledný údaj je označenie úlohy podľa tohto letáka. Zadania úloh nemusíte opisovať. Ak sa vám riešenie nezmestí na jeden list, uveďte na ďalších listoch vľavo hore svoje meno a označenie úlohy a strany očíslujte. **Riešenie píšte ako výklad, v ktorom sú uvedené všetky podstatné úvahy tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup.**

Veľa radosti z úspešného riešenia úloh vám všetkým praje

Doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.
predseda SK MO

Archív zadaní a riešení úloh MO najdete na internetových stránkach:

http://www.iuventa.sk
http://pppnnn.webpark.sk/mo.htm
http://matematika.webpark.sk/

Radi by sme upozornili učiteľov a študentov na Korešpondenčný matematický seminár (KMS) organizovaný združením Trojsten. Táto súťaž je veľmi efektívnou formou prípravy na MO a tiež zdokonaľovania sa v matematickom myslení ako takom. K tomu prispievajú aj záverečné sústredenia pre najlepších riešiteľov. Pre riešiteľov MO kategórií B a C je v KMS určená kategória ALFA. Pre lepších a skúsenejších z kategórie B a pre kategóriu A je v KMS určená kategória BETA. A nakoniec pre tých, čo majú ambície uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je v KMS určená kategória GAMMA. Viac informácií o KMS nájdete v priloženom samostatnom letáku.

Na ďalšiu spoluprácu sa teší

Martin Potočný

KATEGÓRIA C

C – I – 1

Nech a, b, c, d sú také reálne čísla, že $a + d = b + c$. Dokážte nerovnosť $(a-b)(c-d) + (a-c)(b-d) + (d-a)(b-c) \geq 0$.

(E. Kováč)

C – I – 2

Zistite, pre ktoré prirodzené čísla $n \geq 2$ je možné z množiny $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ vybrať navzájom rôzne párne čísla tak, aby ich súčet bol deliteľný číslom n.

(J. Zhouf)

C – I – 3

V ľubovoľnom konvexnom štvoruholníku $ABCD$ označme E stred strany BC a F stred strany AD. Dokážte, že trojuholníky AED a BFC majú rovnaký obsah práve vtedy, keď sú strany AB a CD rovnobežné.

(J. Šimša)

C – I – 4

Tri štvormiestne čísla k, l, m majú rovnaký tvar $ABAB$, t.j. číslica na mieste jednotiek je rovnaká ako číslica na mieste stoviek a číslica na mieste desiatok je rovnaká ako číslica na mieste tisícok. Číslo l má číslicu na mieste jednotiek o 2 väčšiu a číslicu na mieste desiatok o 1 menšiu ako číslo k. Číslo m je súčtom čísel k a l a je deliteľné deviatimi. Určte všetky také čísla k.

(T. Joska)

C – I – 5

Určte počet všetkých trojíc dvojmiestnych prirodzených čísel a, b, c, ktorých súčin abc má zápis, v ktorom sú všetky číslice rovnaké. Trojice líšiace sa len poradím čísel považujeme za rovnaké, t.j. započítavame ich len raz.

(J. Šimša)

C – I – 6

V trojuholníku ABC so stranou BC dĺžky $2\,\mathrm{cm}$ je bod K stredom strany AB. Body L a M rozdeľujú stranu AC na tri zhodné úsečky. Trojuholník KLM je rovnoramenný a pravouhlý. Určte dĺžky strán AB, AC všetkých takých trojuholníkov ABC.

(P. Leischner)

KATEGÓRIA B

B – I – 1

Určte všetky dvojice (a,b) reálnych čísel, pre ktoré má každá z rovníc

$$x^2+ax+b=0\,,\qquad x^2+(2a+1)x+2b+1=0$$

dva rôzne reálne korene, pričom korene druhej rovnice sú prevrátenými hodnotami koreňov prvej rovnice.

(E. Kováč)

B – I – 2

Daný je rovnobežník $ABCD$. Priamka vedená bodom D pretína úsečku AC v bode G, úsečku BC v bode F a polpriamku AB v bode E tak, že trojuholníky BEF a CGF majú rovnaký obsah. Určte pomer $|AG|:|GC|$.

(T. Jurík)

B – I – 3

Na stole leží k hromádok o $1,2,3,\ldots,k$ kameňoch, kde $k\ge 3$. V každom kroku vyberieme tri ľubovoľné hromádky na stole, zlúčime ich do jednej a pridáme k nej jeden kameň, ktorý dovtedy na stole nebol. Dokážte, že ak po niekoľkých krokoch vznikne jediná hromádka, potom výsledný počet kameňov nie je deliteľný tromi.

(J. Zhouf)

B – I – 4

Označme V priesečník výšok a S stred kružnice opísanej trojuholníku ABC, ktorý nie je rovnostranný. Dokážte, že ak uhol pri vrchole C má $60°$, potom os uhla ACB je osou úsečky VS.

(J. Zhouf)

B – I – 5

V obore reálnych čísel vyriešte rovnicu

$$\frac{x}{x+4}=\frac{5\lfloor x\rfloor-7}{7\lfloor x\rfloor-5}\,,$$

kde $\lfloor x\rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako x (tzv. dolná celá časť reálneho čísla x).

(J. Šimša)

B – I – 6

Do kružnice k s polomerom r sú vpísané dve kružnice k_1,k_2 s polomerom $\frac{r}{2}$, ktoré sa vzájomne dotýkajú. Kružnica l sa zvonka dotýka kružníc k_1,k_2 a s kružnicou k má vnútorný dotyk. Kružnica m má vonkajší dotyk s kružnicami k_2 a l a vnútorný dotyk s kružnicou k. Vypočítajte polomery kružníc l a m.

(L. Boček)

M A T E M A T I C K Á   O L Y M P I Á D A

54. ročník   Školský rok 2004 / 2005   I. kolo (domáca časť)

****

KATEGÓRIA A

A – I – 1

Neprázdnu podmnožinu prirodzených čísel nazveme *malou*, keď má menej prvkov, ako je jej najmenší prvok. Určte počet všetkých tých malých množín M, ktoré sú podmnožinami množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ a majú nasledovnú vlastnosť: ak do M patria dve rôzne čísla x a y, potom do M patrí aj číslo $|x - y|$.

(J. Földes)

A – I – 2

Nech M je ľubovoľný vnútorný bod kratšieho oblúka CD kružnice opísanej štvorcu $ABCD$. Označme P, R priesečníky priamky AM postupne s úsečkami BD, CD a podobne Q, S priesečníky priamky BM s úsečkami AC, DC. Dokážte, že priamky PS a QR sú navzájom kolmé.

(J. Švrček)

A – I – 3

Nech k je ľubovoľné prirodzené číslo. Uvažujme dvojice (a, b) celých čísel, pre ktoré majú kvadratické rovnice

$$x^2 - 2ax + b = 0, \qquad y^2 + 2ay + b = 0$$

reálne korene (nie nutne rôzne), ktoré možno označiť $x_{1,2}$ resp. $y_{1,2}$ v takom poradí, že platí rovnosť $x_1 y_1 - x_2 y_2 = 4k$.

a) Pre dané k určte najväčšiu možnú hodnotu b zo všetkých takých dvojíc (a, b).

b) Pre $k = 2004$ určte počet všetkých takých dvojíc (a, b).

c) Pre dané k vypočítajte súčet čísel b zo všetkých takých dvojíc (a, b), pričom každé číslo b sa pripočíta toľkokrát, v koľkých dvojiciach (a, b) vystupuje.

(E. Kováč)

A – I – 4

Dané aritmetické postupnosti $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ a $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ majú rovnaký prvý člen a nasledovnú vlastnosť: existuje index k ($k > 1$), pre ktorý platia rovnosti

$$x_k^2 - y_k^2 = 53, \qquad x_{k-1}^2 - y_{k-1}^2 = 78, \qquad x_{k+1}^2 - y_{k+1}^2 = 27.$$

Nájdite všetky také indexy k.

(V. Bálint)

A – I – 5

V lichobežníku $ABCD$, kde $AB \parallel CD$, platí $|AB| = 2|CD|$. Označme E stred ramena BC. Dokážte, že rovnosť $|AB| = |BC|$ platí práve vtedy, keď štvoruholník $AECD$ je dotyčnicový.

(R. Horenský)

A – I – 6

Nájdite všetky funkcie $f : \langle 0, +\infty) \to \langle 0, +\infty)$, ktoré splňujú zároveň tri nasledovné podmienky:

a) Pre ľubovoľné nezáporné čísla x, y také, že $x + y > 0$, platí rovnosť

$$f\big(x\,f(y)\big)\,f(y) = f\left(\frac{xy}{x+y}\right);$$

b) $f(1) = 0$;

c) $f(x) > 0$ pre ľubovoľné $x > 1$.

(P. Calábek)

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY
Fakulta PEDaS Žilinskej univerzity, 010 26 Žilina

54. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY
Leták kategórií A, B, C – I. kolo, domáca časť

Autori úloh: V. Bálint , L. Boček, P. Calábek, J. Földes, R. Horenský, T. Joska, T. Jurík, E. Kováč, P. Leischner, J. Šimša, J. Švrček, J. Zhouf

Vydala IUVENTA pre vnútornú potrebu rezortu Ministerstva školstva SR
Miesto a dátum vydania: Bratislava, august 2004
Náklad: 700
Neprešlo jazykovou úpravou
Grafická úprava: Miroslava Smitková
Zodpovedný redaktor: doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.