

2017/2018
67. ročník MO

Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia

(Súťaž sa konala 24. – 27. 6. 2018.)

1. Určte všetky funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x, y platí

$$f(x^2 + xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x + y).$$

(Walther Janous, Rakúsko)

2. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC , ktorého žiadne dve strany nemajú rovnakú dĺžku. Vnútri strán AB a AC sú postupne zvolené body D a E , pričom $|BD| = |CE|$. Označme O_1, O_2 postupne stredy kružníc opísaných trojuholníkom ABE, ACD . Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom ABC, ADE a AO_1O_2 majú spoločný bod rôzny od A .
(Patrik Bak)

3. Okolo okrúhleho stola sedí 2018 hráčov. Na začiatku hry rozdáme hráčom ľubovoľne všetky karty z balíčka, ktorý obsahuje K kariet (niektorí hráči nemusia dostať žiadne karty). Následne v každom ťahu zvolíme jedného hráča, ktorý si od každého zo svojich dvoch susedov zoberie jednu kartu. Je dovolené zvoliť len takého hráča, ktorého obaja susedia majú nenulový počet kariet. Hra skončí, keď taký hráč neexistuje. Určte najväčšiu takú hodnotu K , že bez ohľadu na rozdanie kariet a následnú voľbu hráčov hra vždy skončí po konečnom počte ťahov.
(Peter Novotný)

4. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC s obvodom $2s$ a tri navzájom disjunktné kruhy so stredmi v bodoch A, B, C . Dokážte, že existuje kruh s polomerom s , ktorý obsahuje všetky tri dané kruhy.
(Josef Tkadlec)

5. V obdĺžniku s rozmermi 2×3 leží lomená čiara s celkovou dĺžkou 36, ktorá môže pretínať sama seba. Dokážte, že existuje priamka, ktorá je rovnobežná s dvoma stranami obdĺžnika, pretína zvyšné dve strany v ich vnútorných bodoch a pretína danú lomenú čiaru v menej ako 10 bodoch.
(Josef Tkadlec, Vojtech Bálint)

6. Kladné celé číslo n nazývame *fantastické*, ak existujú kladné racionálne čísla a, b také, že

$$n = a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b}.$$

- Dokážte, že existuje nekonečne veľa prvočísel p takých, že žiadny násobok p nie je fantastický.
- Dokážte, že existuje nekonečne veľa prvočísel p takých, že aspoň jeden násobok p je fantastický.

(Walther Janous, Rakúsko)