

# MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

pre žiakov základných škôl

a nižších ročníkov osemročných gymnázií

54. ročník, školský rok 2004 / 2005

I. kolo (domáca časť)



Milí žiaci,

máte radi zaujímavé matematické úlohy a chceli by ste si zasúťažiť v ich riešení? Ak áno, zúčastnite sa Matematickej olympiády (MO). Súťaž je dobrovoľná a nesúvisí s klasifikáciou z matematiky. Matematická olympiáda má niekoľko kategórií. V tomto letáku nájdete úlohy, ktoré sú určené žiakom základných škôl (ZŠ) a prvých štyroch ročníkov osemročných gymnázií (OG).

Kategória **Z9** je určená pre žiakov 9. ročníka ZŠ, 4. ročníka OG a 1. ročníka bilingválnych gymnázií.

Kategória **Z8** je určená len pre žiakov 8. ročníka ZŠ.

Kategória **Z7** je určená pre žiakov 7. ročníka ZŠ a 3. ročníka OG.

Kategória **Z6** je určená pre žiakov 6. ročníka ZŠ a 2. ročníka OG.

Kategória **Z5** je určená pre žiakov 5. ročníka ZŠ a 1. ročníka OG.

Kategória **Z4** je určená pre žiakov 4. ročníka ZŠ.

So súhlasom svojho učiteľa matematiky môžete súťažiť aj v niektorej kategórii určenej pre vyšší ročník (aj v kategórii Z8), alebo v kategóriách **A**, **B**, **C** alebo **P**, ktoré sú určené pre žiakov stredných škôl (úlohy sú uverejnené v letáku MO pre stredné školy).

## Priebeh súťaže

Kategória Z4 pozostáva z domáceho a školského kola, kategórie Z5, Z6, Z7, Z8 z domáceho a okresného kola, kategória Z9 z domáceho, okresného a krajského kola.

V rámci domáceho kola riešite 6 úloh, ktoré sú v tomto letáku. **Riešenia úloh odovzdajte svojim učiteľom matematiky najneskôr v týchto termínoch:**

kategória	jedna trojica úloh	druhá trojica úloh
Z4, Z5, Z9	5. november 2004	15. december 2004
Z6, Z7, Z8	3. december 2004	25. február 2005

Vaši učitelia vám riešenia opravujú a ohodnotia podľa stupnice: 1 - *výborne*, 2 - *dobre*, 3 - *nevyhovuje*.

Úspešným riešiteľom domáceho kola sa stáva žiak, ktorý bude mať ohodnotenú aspoň štyri úlohy stupňom aspoň *dobre*. Práce všetkých úspešných riešiteľov kategórií Z5 - Z9 zašle vaša škola okresnej komisii MO. Tá z nich vyberie najlepších riešiteľov a pozve ich do okresného kola. V rámci neho riešite úlohy podobného rázu ako v domácom kole, avšak klauzúrne, to znamená, že nemôžete využívať cudziu pomoc a na riešenie máte k dispozícii obmedzený čas (2 hodiny v kategóriách Z5, Z6, Z7, Z8, 4 hodiny v kategórii Z9).

V kategórii Z4 sa úspešní riešitelia domáceho kola zúčastnia školského klauzúrneho kola. Najlepší riešitelia okresného kola kategórie Z9 budú pozvaní do krajského kola.

**Termíny:**

<b>kategória</b>	<b>II. kolo</b>	<b>III. kolo</b>
Z4	26. január 2005	-----
Z5	26. január 2005	-----
Z6-Z8	6. apríl 2005	-----
Z9	26. január 2005	16. marec 2005

**Pokyny a rady súťažiacim**

Riešenie súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

Jozef Plachý, 7.C  
ZŠ Hodžova ul. 5, 949 01 Nitra  
Úloha Z7-I-2

Riešenie píšete tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup, podrobne vysvetlite, ako ste uvažovali. Uvedomte si, že sa hodnotí nielen výsledok, ku ktorému ste došli, ale hlavne správnosť úvah, ktoré k nemu viedli. Práce, ktoré nebudú spĺňať tieto podmienky, alebo budú odovzdané po termíne, nebudú do súťaže prijaté.

Veľa radosti z úspešného riešenia úloh MO prajú

RNDr. Monika Dillingerová  
vedúca sekcie Z

doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.  
predseda SK MO

*Archív zadaní a riešení úloh MO najdete na internetových stránkach:*

<http://www.iuventa.sk/category.php?CategoryID=68>

<http://pppnnn.webpark.sk/mo.htm>

<http://matematika.webpark.sk/>

KATEGÓRIA Z4

**Z4-I-1**

Z čísla 6574839201 vyškrtni niektoré číslice tak, aby vzniknuté číslo bolo čo najmenšie a aby súčet cifier na mieste desiatok a mieste tisícok bol 7 a rozdiel cifier na mieste stoviek a mieste jednotiek bol 2.

(S. Bodláková, M. Dillingerová)

**Z4-I-2**

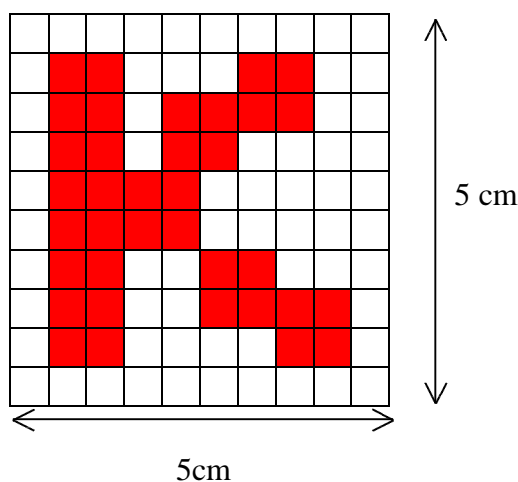
Obdĺžnik JURO má obvod 36 cm, štvorec LENA má obvod 24 cm. JURO a LENA sú rodičmi obdĺžnikov a štvorcov, ktoré majú polovičný obvod ako LENA alebo polovičný obvod ako JURO. Prítom všetky dcéry sú štvorce a žiadny syn nie je štvorec. Koľko najviac môžu mať JURO a LENA rôznych synov a koľko rôznych dcér, ak rozmery detí sú v centimetroch zapísané celými číslami?

(S. Bodláková)

**Z4-I-3**

Stará mama pletla pre svoju vnučku Katku šál so vzorom s písmenami K. Najprv uplietla vzorku tvaru štvorca s dĺžkou strany 5 cm (pozri obr. 1). Potom z takýchto vzorov urobila šál dlhý 1 m a široký 20 cm. Koľko bolo na šále písmeniek K?

(S. Bodláková)



Obr. 1

**Z4-I-4**

Od pondelka do piatku býva náš psík Bobi doma sám, lebo rodičia sú v práci a deti v škole. Jeden mesiac bol však sám iba 11 dní. Najprv bol tri dni od nedele do utorka doma Ivan, lebo ho bolelo brucho. Len čo vyzdravel, ostala doma Majka s chrípkou, a to od stredy do štvrtka ďalšieho týždňa. Koľko dní mohol mať ten mesiac?

(M. Dillingerová)

**Z4-I-5**

Na Vianočných trhoch boli vystavené 5, 7 a 9 ramenné svietniky, pričom na každom ramene bola osadená jedna sviečka. Spolu tam bolo 9 svietnikov a 67 sviečok. Zisti, koľko ktorých svietnikov tam bolo.

(M. Dillingerová)

**Z4-I-6**

Na telocviku bolo 9 chlapcov a 8 dievčat v dvoch zástupoch. V zástupe chlapcov bol každý chlapec o 1 cm vyšší než ten, ktorý stál tesne pred ním. V dievčenskom zástupe bolo každé dievča o 2 cm vyššie než to, ktoré stálo tesne pred ním. Najvyššie dievča bolo o 15 cm vyššie ako najnižší chlapec. Tretí najvyšší chlapec meria 134 cm. Koľko cm meria najnižšie dievča?

(M. Dillingerová)

KATEGÓRIA Z5

Z5-I-1

Viktor chcel napísať zoznam všetkých dvojčiferných čísel, ktoré po delení piatimi dávajú zvyšok 3. Keď napísané čísla sčítal, dostal súčet 911. Ktoré číslo zabudol na zoznam napísať, ak tam žiadne nesprávne napísané nebolo?

(L. Hozová)

Z5-I-2

Anička a Marienka mali mať zraz presne o 17:30 pred kinom. Anička si myslela, že jej idú hodinky o 4 minúty napred, ale v skutočnosti jej meškali 8 minút. Marienka si myslela, že jej hodinky 8 minút meškajú, ale išli jej o 4 minúty napred. Kedy ktoré z dievčat prišlo na zraz, ak si obe mysleli, že prišli presne o 17:30?

(Š. Ptáčková)

Z5-I-3

Traja princovia išli bojovať s mnohohlavým drakom. Najprv mu prvý princ ľavou rukou odsekol polovicu hláv a pravou rukou ešte ďalšie dve hlavy. Potom mu druhý princ tiež ľavou rukou odsekol polovicu zvyšných hláv a pravou rukou ešte ďalšie dve a napokon tretí princ mu ľavou rukou odsekol polovicu zvyšných hláv a pravou rukou ešte ďalšie dve. Potom drak padol bezhlavý na zem. Koľkohlavý drak to bol?

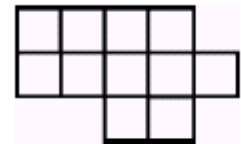
(Š. Ptáčková)

Z5-I-4

Na obr. 1 je mnohoúholník zložený z 11 rovnakých štvorcíkov. Zistite jeho obvod, ak jeden malý štvorcík má obvod 20 cm.

Ktoré dva štvorcíky mnohoúholníka treba ubrať, aby vznikol nový mnohoúholník s čo najväčším obvodom?

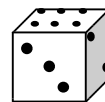
(S. Bednářová)



Obr. 1

Z5-I-5

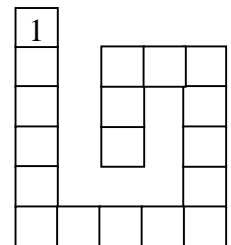
Hracia kocka má bodky rozmiestnené tak, že ich súčet na protiľahlých stenách je vždy 7. Kocka na obr. 2 stojí na stene s jednou bodkou, takže na podložke zanechá odtlačok "1". Keď prevalíme kocku doprava na stenu s dvomi bodkami, zanechá na podložke odtlačok "2". Keď potom prevalíme kocku smerom k sebe, zanechá odtlačok "3". Pri tomto prevalovaní dostaneme stopu na obr. 3. Súčet čísel tejto stopy je 6.



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

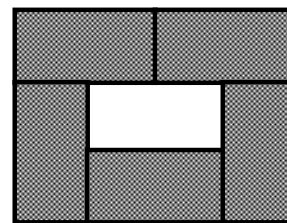
Aký bude súčet na stope na obr. 4, ak východzie postavenie kocky je na obr. 2?

Nakreslite, ako by mohla vypadáť stopa, na ktorej je súčet 22, ak východzie postavenie kocky je na obr. 2?

(L. Hozová)

**Z5-I-6**

Ivanka si stavia zo stavebnice komíny. Všetky diely stavebnice sú rovnaké kvádre a majú rozmery 1 cm, 1 cm a 2 cm. Teraz postavila jednoposchodový dutý komín z piatich kvádrov na ploche  $12\text{ cm}^2$  (viď obr. 5). Rozhodla sa ale, že postaví dutý komín na ploche  $36\text{ cm}^2$  z 260 takých kvádrov. Aký najvyšší komín mohla postaviť, ak jej žiaden kváder nezostal a komín bol na vrchu zarovnaný?



Obr. 5

(Š. Ptáčková)

KATEGÓRIA Z6

**Z6-I-1**

Desatinné číslo nazveme *vyvážené*, ak je súčet cifier nachádzajúcich sa pred desatinnou čiarkou rovný súčtu cifier za desatinnou čiarkou. Napr. číslo 25,133 je vyvážené. Napíšte

- najväčšie,
- najmenšie vyvážené číslo,

ktorého žiadne dve číslice nie sú rovnaké.

(S. Bednářová)

**Z6-I-2**

Obdĺžnik sme rozdelili na tri trojuholníky. V týchto trojuholníkoch sme správne odmerali všetky vnútorné uhly a získali sme tak tieto hodnoty:  $20^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $50^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $90^\circ$  a  $130^\circ$ . Dopíšte ich na správne miesta v nasledujúcom obrázku. (Pozor, obrázok môže byť veľmi nepresný, neoplatí sa merať!)



Obr. 1

(S. Bednářová)

**Z6-I-3**

V krajine Čísielkovo žijú iba prirodzené čísla. Muži a chlapci sú párne čísla, ženy a dievčatá sú nepárne čísla. Manželia majú deti hneď po svadbe, a to všetky čísla, ktoré delia ich súčin bezo zvyšku. Ktorého nápadníka z čísel 2, 8, 14 si má vybrať slečna Sedmička, ak chce mať čo najviac rôznych detí? Ktorého nápadníka z čísel 2, 8, 14 si má vybrať slečna Sedmička, ak chce mať rovnako veľa synov ako dcér, ale žiadne dve deti rovnaké?

(M. Dillingerová)

**Z6-I-4**

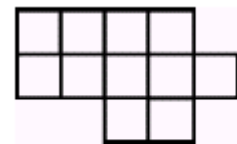
Na kartičke mám napísané párne štvorciferné číslo. Rozstrihnem ju tak, že získam dve dvojciferné čísla, ktorých súčin je 2562. Ktoré štvorciferné číslo som mala napísané na kartičke?

(M. Raabová)

**Z6-I-5**

Na obrázku 2 je mnohoúholník zložený z 11 rovnakých štvorčekov.

- Zistíte jeho obvod, ak viete, že jeden malý štvorček má obvod 2 cm.
- Ktoré dva štvorčeky mnohoúholníka treba premiestniť, aby vznikol nový mnohoúholník s čo najväčším obvodom? (Ak sa premiestnený štvorec dotýka iného štvorca, musia mať spoločný buď iba vrchol alebo celú stranu.)



Obr. 2

(S. Bednářová)

**Z6-I-6**

V Petroviciach, Bodríkovciach a Micinkove žije spolu 6000 obyvateľov. V každej z týchto troch dedínok pripadá v priemere na 20 obyvateľov 1 pes a na 30 obyvateľov 1 mačka. V Petroviciach a Bodríkovciach žije celkom 234 psov, v Bodríkovciach a Micinkove žije celkom 92 mačiek. Koľko obyvateľov majú jednotlivé dedinky?

(Š. Ptáčková)



\*\*\*\*\*

**KATEGÓRIA Z7**

**Z7-I-1**

Dlhý, Široký a Bystrozraký si merali svoju výšku. Zistili, že Dlhý je dvakrát taký vysoký ako Široký. Bystrozrakého výška tvorí len dve tretiny výšky Dlhého, ale je o 44 cm vyšší ako Široký. Zistite, aký vysoký je Dlhý, Široký aj Bystrozraký.

(M. Dillingerová)

**Z7-I-2**

Je dané päťciferné číslo deliteľné tromi. Ak z neho vyškrtne číslce na nepárnych miestach, dostaneme dvojciferné číslo, ktoré je 67-krát menšie, než číslo získané z pôvodného päťciferného čísla vyškrtnutím číslic na párnych miestach. Zistite, aké mohlo byť pôvodné päťciferné číslo.

(M. Raabová)

**Z7-I-3**

V krajine Číselkovo žijú iba prirodzené čísla. Muži a chlapci sú párne čísla, ženy a dievčatá sú nepárne čísla. Manželia majú deti hneď po svadbe, a to všetky čísla, ktoré delia ich súčin bezo zvyšku.

- a) Ktorého nápadníka z čísel 2, 16, 28, 46 si má vybrať slečna Deviatka ak chce mať čo najviac rôznych detí?
- b) Ktorého nápadníka z čísel 2, 16, 28, 46 si má vybrať slečna Deviatka ak chce mať rovnako veľa synov ako dcér, ale žiadne dve deti rovnaké?

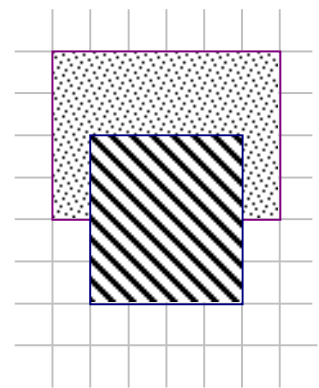
(M. Dillingerová)

**Z7-I-4**

Kamilka pri kreslení obdĺžnikov (štvorec je špeciálny prípad obdĺžnika) v štvorcovej sieti narazila na takúto zaujímavú dvojicu: obdĺžnik s rozmermi 6 cm a 4 cm a štvorec so stranou dĺžky 4 cm. Najprv zakreslila do siete obdĺžnik a potom štvorec (pozri obrázok 1). S údivom vo svojom obrázku objavila, že obsah nezakrytej časti obdĺžnika je rovný obsahu štvorca a nezakrytá časť obvodu obdĺžnika sa rovná celému obvodu štvorca.

Medzi nasledujúcimi obdĺžnikmi nájdite všetky dvojice, ktoré majú obe vlastnosti Kamilkiných obdĺžnikov:

3 cm × 9 cm, 4 cm × 9 cm, 4 cm × 6 cm a 5 cm × 7 cm.



Obr. 1

(M. Dillingerová)

**Z7-I-5**

Myška Hryzka našla tehlu syra. Prvý deň zjedla  $\frac{1}{8}$  syra, druhý deň  $\frac{1}{7}$  zvyšku, tretí deň  $\frac{1}{6}$  zvyšku a štvrtý deň  $\frac{1}{5}$  zvyšku syra. Potom už zo syra zostala iba kocka s povrchom  $150 \text{ cm}^2$ . Aký objem mala pôvodná tehla syra?

(M. Dillingerová)

**Z7-I-6**

Archeológovia vykopali papyrus so zaujímavou tabuľkou s výrezom v tvare písmena **Z** (pozri obrázok 2). Domnievajú sa, že ide o talizman indiánskeho kmeňa *Sčítačov*. Každý ich talizman mal nasledujúcu vlastnosť: Ak v ňom zakrúžkujete ľubovoľných päť čísel tak, aby v každom stĺpci aj riadku bolo zakrúžkované práve jedno, a týchto päť čísel sčítate, dostanete vždy ten istý súčet. Pokúste sa zreštaurovať tento talizman, t. j. doplňte čísla na prázdne miesta.

0				6
			8	
	3		5	7
	2			
4		9		

Obr. 2

(S. Bednářová)



### Z8-I-6

Archeológovia vykopali papyrus so zaujímavou tabuľkou s výrezom v tvare písmena **Z** (pozri obr. 4). Domnievajú sa, že ide o talizman indiánskeho kmeňa *Sčítačov*. Každý ich talizman mal nasledujúcu vlastnosť: Ak v ňom zakrúžkujete ľubovoľných päť čísel tak, aby v každom stĺpci aj riadku bolo zakrúžkované práve jedno, a týchto päť čísel sčítate, dostanete vždy ten istý súčet. Pokúste sa zreštaurovať tento talizman, t. j. doplňte čísla na prázdne miesta.

0				6
			8	
	3		5	7
	2			
4		9		

Obr. 4

(S. Bednářová)

**KATEGÓRIA Z9**

**Z9-I-1**

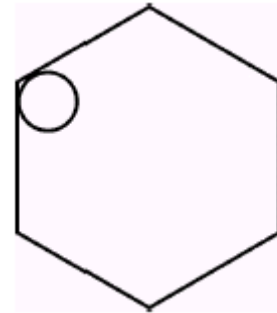
Dvojciferné číslo nazveme *exkluzívne* práve vtedy, keď má nasledujúcu vlastnosť: ak cifry exkluzívneho čísla navzájom vynásobíme a k tomuto súčinu pripočítame ciferný súčet daného exkluzívneho čísla, dostaneme práve toto exkluzívne číslo. Napríklad číslo 79 je exkluzívne, lebo

$79 = 7 \cdot 9 + (7 + 9)$ . Nájdite všetky exkluzívne čísla.

(P. Tlustý)

**Z9-I-2**

Vnútri pravidelného šesťuholníka so stranou dĺžky  $2\sqrt{3}$  cm sa pohybuje kruh s priemerom dĺžky 1 cm tak, že sa stále dotýka obvodu pravidelného šesťuholníka. Vypočítajte obsah tej časti šesťuholníka, ktorá nemôže byť nikdy prekrytá pohybujúcim sa kruhom.



(M. Dillingerová)

**Z9-I-3**

Koľko existuje spôsobov ako vybrať sedem čísel z množiny  $\{1, 2, \dots, 8, 9\}$  tak, aby ich súčet bol deliteľný tromi?

(P. Tlustý)

**Z9-I-4**

Nech sú dané kruh a štvorec s rovnakým obsahom. Do daného kruhu vpíšeme štvorec, do daného štvorca vpíšeme kruh. Ktorý z vpísaných obrazcov má väčší obsah?

(M. Volfová)

**Z9-I-5**

Pán Párny mal párnny počet ovečiek, pán Nepárny mal nepárny počet ovečiek. Počet všetkých ovečiek týchto dvoch pánov tvoril trojčiferné číslo, ktoré malo všetky číslice rovnaké. Každý ovečke pána Párneho sa narodili tri ovečky, každej ovečke pána Nepárneho dve ovečky. Jedného dňa však vlk roztrhal tri ovečky pánovi Párnemu. Teraz má pán Párny rovnako veľa ovečiek, ako pán Nepárny. Koľko ovečiek mal pôvodne každý z chovateľov?

(L. Hozová)

**Z9-I-6**

Päť detí postupne povedalo:

”Včera bol pondelok.”

”Dnes je štvrtok.”

”Pozajtra bude piatok.”

”Zajtra bude sobota.”

”Predvčerom bol utorok.”

Keby ste vedeli, koľko detí klamalo, hneď by bolo jasné, ktorý je dnes deň. Ktorý je dnes deň?

(Š. Ptáčková)

Na ukážku uvádzame *vzorové riešenie* jednej úlohy zo staršej olympiády:

### Úloha Z8-II-1.

Daný je obdĺžnik s celočíselnými dĺžkami strán. Ak zväčšíme jednu jeho stranu o 4 a druhú zmenšíme o 5, dostaneme obdĺžnik s dvojnásobným obsahom. Určte strany daného obdĺžnika. Nájdite všetky možnosti.

**Riešenie.** Dĺžky strán obdĺžnika označíme  $a, b$ . Nový obdĺžnik má dĺžky strán  $a+4, b-5$ . Podľa podmienky úlohy pre obsahy oboch obdĺžnikov platí:

$$2ab = (a+4)(b-5).$$

Postupne upravíme:  $ab - 4b + 5a = -20$

$$ab - 4b + 5a - 20 = -40.$$

Odčítali sme 20, aby sme mohli ľavú stranu upraviť na súčin:

$$(a-4)(b+5) = -40.$$

Riešenie nájdeme rozkladom čísla  $-40$  na dva činitele. Pritom musí byť  $a > 0, b > 0$ , a teda  $a-4 > -4, b+5 > 5$ .

Sú dve možnosti:  $(-2) \cdot 20 = -40$  a  $(-1) \cdot 40 = -40$ .

V prvom prípade dostaneme obdĺžnik s dĺžkami strán  $a = 2, b = 15$  s obsahom  $S = 30$ . Nový obdĺžnik má potom strany  $a' = 6, b' = 10$  a obsah  $S' = 60$ , t.j.  $S' = 2S$ .

V druhom prípade dostaneme obdĺžnik so stranami  $a = 3, b = 35$  s obsahom  $S = 105$ . Nový obdĺžnik má potom strany  $a' = 7, b' = 30$  a obsah  $S' = 210$ . Opäť je  $S' = 2S$ .

### Na záver jedna rada.

Úlohy nie sú ľahké. Nenechajte sa odradiť, keď neobjavíte hneď riešenie. Experimentujte, kreslite si, „hrajte sa“ s úlohou. Niekedy pomôže pozrieť sa do nejakej knižky, kde nájdete podobné úlohy vyriešené; inokedy sa môže stať, že zrazu o tri dni „z ničoho nič“ na riešenie prídete.

Súťaž vyhlasuje Ministerstvo školstva SR spolu s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov. Súťaž riadi Slovenská komisia MO, v jednotlivých okresoch okresné komisie MO. Na jednotlivých školách súťaž zaisťujú učitelia matematiky.

**Vy sa vždy obracajte na svojho učiteľa matematiky.**

**SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY**  
Fakulta PEDaS Žilinskej univerzity, 010 26 Žilina

**54. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY**  
**Leták kategórií Z4-Z9, I. kolo, domáca časť**

Autori úloh: PaedDr. S. Bednářová, PhD., RNDr. M. Dillingerová,  
Dr. L. Hozová, Mgr. Š. Ptáčková, Mgr. M. Raabová, doc. RNDr. P. Tlustý, CSc.,  
doc. Dr. M. Volfová, PhD.

Vydala IUVENTA pre vnútornú potrebu rezortu Ministerstva školstva SR  
Miesto a rok vydania: Bratislava, august 2004  
Náklad: 2 000

Neprešlo jazykovou úpravou  
Grafická úprava: Mgr. Miroslava Smitková  
Zodpovedný redaktor: doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.

© Slovenská komisia matematickej olympiády, 2004