2009/2010
59. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie C*

(*Termín odovzdania: v pondelok 11. januára 2010.*)

1. Erika a Klárka hrali hru „slovný logik“ s týmito pravidlami: Hráč A si myslí slovo zložené z piatich rôznych písmen. Hráč B vysloví ľubovoľné slovo zložené z piatich rôznych písmen a hráč A mu prezradí, koľko písmen uhádol na správnej pozícii a koľko na nesprávnej. Písmená považujeme za rôzne, aj keď sa líšia iba mäkčeňom alebo dĺžňom (napríklad písmena A, Á sú rôzne). Keby si hráč A myslel napríklad slovo LOĎKA a B by vyslovil slovo KOLÁČ, odpovie hráč A, že jedno písmeno uhádol hráč B na správnej pozícii a dve na nesprávnej. Skrátene oznámi „$1+2$“, lebo sa naozaj obe slová zhodujú iba v písmene O vrátane pozície (druhej zľava) a v písmenách K a L, ktorých pozície sú odlišné. Erika si myslela slovo z piatich rôznych písmen a Klárka vyslovila slová KABÁT, STRUK, SKOBA, CESTA a ZÁPAL. Erika na tieto slová v danom poradí odpovedala $0+3$, $0+2$, $1+2$, $2+0$ a $1+2$. Zistite, aké slovo si Erika mohla myslieť. (*Peter Novotný*)

2. Vrcholom C pravouholníka $ABCD$ veďte priamky p a q, ktoré majú s daným pravouholníkom spoločný iba bod C, pričom priamka p má od bodu A najväčšiu možnú vzdialenosť a priamka q vymedzuje s priamkami AB, AD trojuholník s čo najmenším obsahom. (*Leo Boček*)

3. Určte všetky reálne čísla x, ktoré vyhovujú rovnici $4x - 2\lfloor x \rfloor = 5$. (Symbol $\lfloor x \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako číslo x, tzv. dolnú celú časť reálneho čísla x.) (*Jaroslav Švrček*)

4. Kružnica $k(S; r)$ sa dotýka priamky AB v bode A. Kružnica $l(T; s)$ sa dotýka priamky AB v bode B a pretína kružnicu k v krajných bodoch C, D jej priemeru. Vyjadrite dĺžku a úsečky AB pomocou polomerov r, s. Dokážte ďalej, že priesečník M priamok CD, AB je stredom úsečky AB. (*Leo Boček*)

5. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b platí

$$\sqrt{ab} \leqq \frac{2(a^2+3ab+b^2)}{5(a+b)} \leqq \frac{a+b}{2},$$

a pre každú z oboch nerovností zistite, kedy prechádza na rovnosť. (*Ján Mazák*)

6. Nájdite všetky prirodzené čísla, ktoré nie sú deliteľné desiatimi a ktoré vo svojom dekadickom zápise majú niekde vedľa seba dve nuly, po ktorých vyškrtnutí sa pôvodné číslo 89-krát zmenší. (*Jaromír Šimša*)