

2008/2009
58. ročník MO

Riešenia úloh domáceho kola kategórie C

1. Tomáš, Jakub, Martin a Peter organizovali na námestí zbierku pre dobročinné účely. Za chvíľu sa pri nich postupne zastavilo päť okoloidúcich. Prvý dal Tomášovi do jeho pokladničky 3 Sk, Jakubovi 2 Sk, Martinovi 1 Sk a Petrovi nič. Druhý dal jednému z chlapcov 8 Sk a ostatným trom nedal nič. Tretí dal dvom chlapcom po 2 Sk a dvom nič. Štvrtý dal dvom chlapcom po 4 Sk a dvom nič. Piaty dal dvom chlapcom po 8 Sk a dvom nič. Potom chlapci zistili, že každý z nich vyzbieral inú čiastku, pričom tieto tvoria štyri po sebe idúce prirodzené čísla. Ktorý z chlapcov vyzbieral najmenej a ktorý najviac korún? (Peter Novotný)

Riešenie. Dokopy chlapci dostali $3 + 2 + 1 + 8 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 8 = 42$ Sk. Toto číslo možno jediným spôsobom vyjadriť ako súčet štyroch po sebe idúcich prirodzených čísel: $42 = 9 + 10 + 11 + 12$. Štyria chlapci teda (v nejakom poradí) vyzbierali sumy 9, 10, 11 a 12 Sk.

Žiadny chlapec nemohol dostať 8 Sk zároveň od druhého aj od piateho okoloidúceho (inak by mal aspoň 16 Sk, najviac však mohol každý z chlapcov dostať 12 Sk). Takže od druhého a piateho majú traja chlapci po 8 Sk a jeden od nich nedostal nič. Najviac jeden z týchto troch chlapcov mohol dostať 4 Sk od štvrtého okoloidúceho, inak by mali už aspoň dvaja chlapci aspoň 12 Sk. Štvrtý okoloidúci musel teda dať 4 Sk práve jednému z nich a 4 Sk zostávajúcemu chlapcovi. Bez peňazí prvého a tretieho okoloidúceho teda majú chlapci vybraných 12, 8, 8 a 4 Sk. Chlapec, ktorý dostal v súčte od druhého, štvrtého a piateho okoloidúceho dvanásť korún, už nemohol dostať od prvého a tretieho okoloidúceho nič, lebo by mal viac ako dvanásť korún. Ten, ktorý dostal v súčte od druhého, štvrtého a piateho okoloidúceho 4 Sk, musel dostať od prvého a tretieho v súčte maximálnu možnú čiastku, t. j. $3 + 2 = 5$ Sk, inak by mal dokopy menej ako 9 Sk (dostal teda práve 9 Sk a vyzbieral najmenej). Takže najmenej vyzbieral Tomáš, lebo on dostal od prvého okoloidúceho 3 Sk, a najviac Peter, ktorý od prvého okoloidúceho nedostal nič.

Úvahy ľahko dokončíme a ukážeme, že popísané rozdelenie je skutočne možné. Ako už vieme, Tomáš vyzbieral 9 Sk a Peter 12 Sk. Jakub, ktorý dostal 2 Sk od prvého, nemohol dostať od tretieho nič, takže dostal celkom 10 Sk, a Martin 11 Sk. Všetky úvahy môžeme prehľadne usporiadať do tabuľky, ktorú postupne dopĺňame.

1	2	3	4	5	Σ
	8		0	0	
	0		0	8	
0	0	0	4	8	12 → P
3	0	2	4	0	≤ 9 → T
1+2+3	1×8	2×2	2×4	2×8	

NÁVODNÉ A DOPĽŇAJÚCE ÚLOHY:

- N1. Ukážte, že prirodzené číslo n možno vyjadriť ako súčet štyroch po sebe idúcich čísel práve vtedy, keď $n \geq 10$ a n dáva zvyšok dva po delení štyrmi. $[(k+1) + (k+2) + (k+3) + (k+4) = 4k+10]$
- D1. Dokážte, že ľubovoľné prirodzené číslo $n \geq 3$, ktoré nie je mocninou čísla 2, možno vyjadriť ako súčet niekoľkých po sebe idúcich prirodzených čísel. $[n = \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2}$ pre

n nepárne, $n = \left(\frac{n}{p} - \frac{p-1}{2}\right) + \left(\frac{n}{p} - \frac{p-1}{2} + 1\right) + \dots + \left(\frac{n}{p} + \frac{p-1}{2}\right)$ pre $n = p \cdot q$, kde $p > 1$ je nepárny deliteľ]

- D2. V klobúku je päť loptičiek a na každej z nich je napísané jedno prirodzené číslo. Súčet čísel na loptičkách v klobúku je 27 a čísla na ľubovoľných dvoch loptičkách sa líšia aspoň o dva. Dokážte, že v klobúku nie je loptička s číslom 6. [V klobúku môžu byť buď loptičky s číslami 1, 3, 5, 7, 11, alebo 1, 3, 5, 8, 10.]

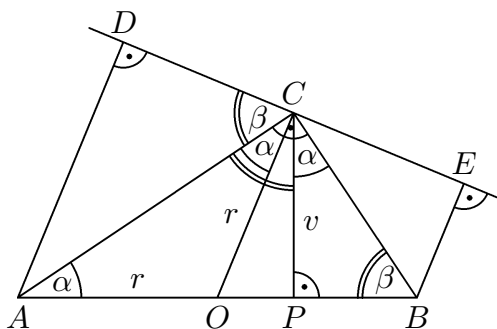
2. Pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB je opísaná kružnica. Päť kolmíc z bodov A, B na dotyčnicu k tejto kružnici v bode C označme D, E . Vyjadrite dĺžku úsečky DE pomocou dĺžok odvesien trojuholníka ABC . (Pavel Leischner)

Riešenie. Označme odvesny trojuholníka ABC zvyčajným spôsobom a, b a protiľahlé uhly α, β . Stred prepony AB (ktorý je súčasne stredom opísanej kružnice) označme O (obr. 1).

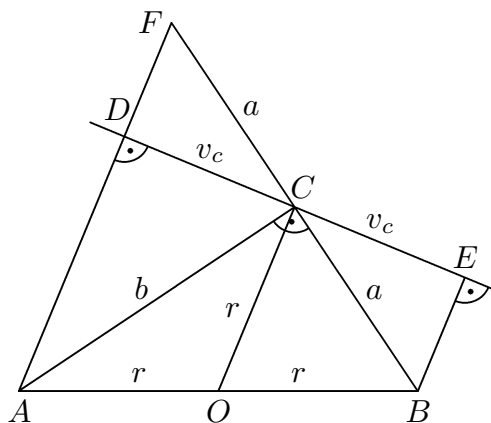
Výška $v = CP$ rozdeľuje trojuholník ABC na trojuholníky ACP a CBP podobné trojuholníku ABC podľa vety uu ($\alpha + \beta = 90^\circ$), úsečka OC je kolmá na DE a navyše $|OC| = |OA| = r$ (polomer opísanej kružnice). Odtiaľ $|\angle OCA| = |\angle OAC| = \alpha$ a $|\angle DCA| = 90^\circ - |\angle OCA| = \beta$.

Pravouhlé trojuholníky ACP a CDP so spoločnou preponou CP sa teda zhodujú aj v uhloch pri vrchole C . Sú preto zhodné, dokonca súmerne združené podľa priamky AC . Analogicky sú trojuholníky CBP a CBE súmerne združené podľa BC . Takže $|CD| = |CE| = v$, čiže $|DE| = 2v = 2ab/\sqrt{a^2 + b^2}$, lebo z dvojakého vyjadrenia dvojnásobku obsahu trojuholníka ABC vyplýva $v = ab/|AB|$, pričom $|AB| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Poznámka. Namiesto dvojakého vyjadrenia obsahu môžeme na výpočet výšky CP využiť podobnosť trojuholníkov CBP a ABC : $\sin \alpha = |CP|/|AC| = |BC|/|AB|$.



Obr. 1



Obr. 2

Iné riešenie. Úsečka OC je strednou priečkou lichobežníka $DABE$, lebo je rovnobežná so základňami a prechádza stredom O ramena AB . Preto D je obrazom bodu E v súmernosti podľa streda C . Obraz F bodu B v tej istej súmernosti leží na polpriamke AD za bodom D (obr. 2). Máme $|CF| = |BC| = a$, uhol ACF je pravý, a teda trojuholníky AFC a ABC sú zhodné. Vidíme, že CD je výška v trojuholníku AFC zhodná s výškou v_c trojuholníka ABC , a DE je jej dvojnásobkom. Veľkosť výšky v_c dopočítame rovnako ako v predchádzajúcom riešení.

Odpoveď. $|DE| = 2ab/\sqrt{a^2 + b^2}$.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

- N1. Vyjadrite výšku v_c pravouhlého trojuholníka ABC s pravým uhlom pri vrchole C pomocou strán a, b, c tohto trojuholníka.
- D1. Nech k je kružnica opísaná pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB dĺžky c . Označme S stred strany AB a D a E priesečníky osí strán BC a AC s jedným oblúkom AB kružnice k . Vyjadrite obsah trojuholníka DSE pomocou dĺžky prepony c . [$c^2/8$]
- D2. Vyjadrite obsah rovnoramenného lichobežníka $ABCD$ so základňami AB a CD pomocou dĺžok a, c jeho základní a dĺžky b jeho ramien. [$\frac{1}{4}(a+c)\sqrt{4b^2-(a-c)^2}$]
- D3. V obdĺžniku $ABCD$ platí $|AB| > |BC|$. Oblúk AC kružnice, ktorej stred leží na strane AB , pretína stranu CD v bode M . Dokážte, že priamky AM a BD sú navzájom kolmé. [48-C-I-2]

3. Nájdite všetky štvorciferné čísla n , ktoré majú nasledujúce tri vlastnosti: V zápise čísla n sú dve rôzne cifry, každá dvakrát. Číslo n je deliteľné siedmimi. Číslo, ktoré vznikne otočením poradia cifier čísla n , je tiež štvorciferné a deliteľné siedmimi.

(Pavel Novotný)

Riešenie. V riešení budeme označovať číslo, ktoré vznikne otočením poradia cifier čísla n , ako \bar{n} . Rozoberieme tri prípady.

(i) Číslo n má tvar $aabb$, kde a, b sú rôzne cifry. Takže $n = 1100a + 11b$ a $\bar{n} = 1100b + 11a$. Číslo 7 má deliť ako n , tak \bar{n} , teda aj ich rozdiel $n - \bar{n} = 1089(a - b)$ a súčet $n + \bar{n} = 1111(a + b)$. Keďže ani číslo 1089, ani číslo 1111 nie sú násobkom siedmich a sedem je prvočíslo, tak $7 \mid a - b$ aj $7 \mid a + b$. Ak použijeme rovnakú úvahu ešte raz, vidíme, že $7 \mid (a - b) + (a + b) = 2a$ a $7 \mid (a + b) - (a - b) = 2b$, teda $7 \mid a$ a $7 \mid b$, čiže $a, b \in \{0, 7\}$. Cifry a, b sú navzájom rôzne, preto jedna z nich musí byť 0. Ale potom jedno z čísel $aabb, bbaa$ nie je štvorciferné. Hľadané číslo n teda nemôže mať uvedený tvar.

(ii) Číslo n má tvar $abab$. Potom $7 \mid n = 1010a + 101b$ a tiež $7 \mid \bar{n} = 1010b + 101a$. Podobne ako v predchádzajúcom prípade odvodíme, že $7 \mid n - \bar{n} = 909(a - b)$ a $7 \mid n + \bar{n} = 1111(a + b)$, a z rovnakých dôvodov ako v predchádzajúcom prípade zistujeme, že $7 \mid a, 7 \mid b$. Niektorá z cifier by teda musela byť 0. Číslo n tak nemôže mať ani tvar $abab$.

(iii) Číslo n má tvar $abba$. Potom otočením poradia cifier vznikne to isté číslo, takže máme jedínú podmienku $7 \mid 1001a + 110b$. Keďže $7 \mid 1001$ a $7 \nmid 110$, je táto podmienka ekvivalentná s podmienkou $7 \mid b$. Preto $b \in \{0, 7\}$, $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$, $a \neq b$. Vyhovuje tak všetkých 17 čísel, ktoré práve uvedené podmienky spĺňajú: 1 001, 2 002, 3 003, 4 004, 5 005, 6 006, 7 007, 8 008, 9 009, 1 771, 2 772, 3 773, 4 774, 5 775, 6 776, 8 778, 9 779.

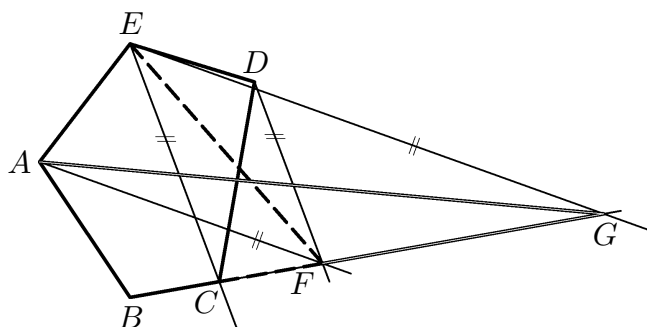
NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

- N1. Určte počet všetkých štvorciferných prirodzených čísel, ktoré sú deliteľné šiestimi a v ktorých zápise sa vyskytujú práve dve jednotky. [56-C-S-1]
- N2. Určte počet všetkých trojíc dvojiciferných prirodzených čísel a, b, c , ktorých súčin abc má zápis, v ktorom sú všetky cifry rovnaké. Trojice líšiace sa len poradím čísel považujeme za rovnaké, t. j. započítavame ich iba raz. [54-C-I-5]
- N3. K prirodzenému číslu m zapísanému rovnakými ciframi sme prečítali štvorciferné prirodzené číslo n . Získali sme štvorciferné číslo s opačným poradím cifier, než má číslo n . Určte všetky také dvojice čísel m a n . [52-C-I-5]

4. Daný je konvexný päťuholník $ABCDE$. Na polpriamke BC zostrojte taký bod G , aby obsah trojuholníka ABG bol zhodný s obsahom daného päťuholníka.

(Lucie Růžičková)

Riešenie. *Rozbor.* Najskôr uvažujme bod F , ktorý je priesečníkom priamky BC a rovnobežky s EC prechádzajúcej bodom D (keďže $E \notin BC$, sú EC a BC rôznobežné, obr. 3). Obsahy trojuholníkov ECD a ECF sú zhodné (majú spoločnú stranu EC a zhodnú výšku na túto stranu), obsah päťuholníka $ABCDE$ je teda zhodný s obsahom štvoruholníka $ABFE$.



Obr. 3

Ďalej uvažujme bod G , ktorý je priesečníkom priamky BC a rovnobežky s AF prechádzajúcej bodom E . Potom sú opäť obsahy trojuholníkov AFE a AFG zhodné, a sú preto zhodné aj obsahy štvoruholníka $ABFE$ a trojuholníka ABG . Bod G tak má požadovanú vlastnosť.

Hľadaný bod je na polpriamke BC jediný, lebo pre rôzne body X, Y na polpriamke BC majú trojuholníky ABX a ABY rôzne výšky na spoločnú stranu AB , majú teda rôzne obsahy.

Popis konštrukcie.

1. p ; $p \parallel EC$, $D \in p$;
2. F ; $F \in p \cap BC$;
3. q ; $q \parallel AF$, $E \in q$;
4. G ; $G \in q \cap BC$;

Úloha má jediné riešenie.

NÁVODNÉ A DOPĽŇAJÚCE ÚLOHY:

- N1. Označme P priesečník uhlopriečok daného konvexného štvoruholníka $ABCD$. Dokážte, že priamky AB a CD sú rovnobežné práve vtedy, keď trojuholníky ADP a BCP majú rovnaký obsah. [Rovnosť obsahov trojuholníkov ADP a BCP je ekvivalentná s rovnosťou obsahov trojuholníkov ABC a ABD so spoločnou stranou AB .]
- N2. V kružnici s polomerom 2 je daná tetiva AB dĺžky 3. Určte, aký najväčší obsah môže mať štvoruholník $AXBY$, ak jeho vrcholy X, Y ležia na kružnici k . [Najväčší obsah 6 má deltoid, ktorého uhlopriečka XY je priemerom kružnice k .]
- D1. Daný je obdĺžnik $ABCD$. Nech priamky p a q , ktoré prechádzajú vrcholom A , pretínajú polkružnice zvonka pripísané stranám BC a CD daného obdĺžnika postupne v bodoch K a L ($B \neq K \neq C \neq L \neq D$) a strany BC a CD postupne v bodoch P a Q tak, že trojuholník ABP má rovnaký obsah ako trojuholník KCP a zároveň trojuholník AQD má rovnaký obsah ako trojuholník CLQ . Dokážte, že body K, L, C ležia na jednej priamke. [53–C–I–2]

5. Z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 99\}$ vyberte čo najväčší počet čísel tak, aby súčet žiadnych dvoch vybraných čísel nebol násobkom jedenástich. (Vysvetlite, prečo zvolený výber má požadovanú vlastnosť a prečo žiadny výber väčšieho počtu čísel nevyhovuje.)

(Jaromír Šimša)

Riešenie. Čísla od 1 do 99 rozdelíme podľa ich zvyšku po delení číslom 11 do jedenástich deväťprvkových skupín T_0, T_1, \dots, T_{10} :

$$T_0 = \{11, 22, 33, \dots, 99\},$$

$$T_1 = \{1, 12, 23, \dots, 89\},$$

$$T_2 = \{2, 13, 24, \dots, 90\},$$

⋮

$$T_{10} = \{10, 21, 32, \dots, 98\}.$$

Ak vyberieme jedno číslo z T_0 (viac ich ani vybrať nesmieme) a všetky čísla z T_1, T_2, T_3, T_4 a T_5 , dostaneme vyhovujúci výber $1 + 5 \cdot 9 = 46$ čísel, lebo súčet dvoch čísel z $0, 1, 2, 3, 4, 5$ je deliteľný jedenástimi jedine v prípade $0 + 0$, z množiny T_0 sme však vybrali iba jedno číslo.

Na druhej strane, v ľubovoľnom vyhovujúcom výbere je najviac jedno číslo zo skupiny T_0 a najviac 9 čísel z každej zo skupín

$$T_1 \cup T_{10}, T_2 \cup T_9, T_3 \cup T_8, T_4 \cup T_7, T_5 \cup T_6,$$

lebo pri výbere 10 čísel z niektorej skupiny $T_i \cup T_{11-i}$ by medzi vybranými bolo niektoré číslo zo skupiny T_i a aj niektoré číslo zo skupiny T_{11-i} ; ich súčet by potom bol deliteľný jedenástimi. Celkom je teda vo výbere najviac $1 + 5 \cdot 9 = 46$ čísel.

Poznámka. Možno uvedené „učesané“ riešenie vyzerá príliš trikovo. Avšak počiatkové úvahy každého riešiteľa k nemu rýchlo vedú: iste záleží len na zvyškoch vybraných čísel, takže rozdelenie na triedy T_i a vyberanie z nich je prirodzené. Je jasné, že z T_0 môže byť vybrané len jedno číslo a všetko ďalšie, o čo sa musíme starať, je požiadavka, aby sme nevybrali zároveň po čísele zo skupiny T_i aj zo skupiny T_{11-i} . Ak je už vybrané niektoré číslo z triedy T_i , kde $i \neq 0$, môžeme kľudne vybrať všetky čísla z T_i , to už skúmanú vlastnosť nepokazí. Je preto dokonca jasné, ako *všetky* možné výbery najväčšieho počtu čísel vyzerajú.

NÁVODNÉ A DOPĽŇAJÚCE ÚLOHY:

- N1. Ukážte, že z ľubovoľných n prirodzených čísel možno vybrať niekoľko (napríklad aj jedno) tak, že ich súčet je deliteľný číslom n . [Uvažujte čísla $a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + \dots + a_n$ a ich zvyšky po delení n .]
- N2. Zistite, pre ktoré prirodzené čísla n ($n \geq 2$) je možné z množiny $\{1, 2, \dots, n-1\}$ vybrať aspoň dve navzájom rôzne párne čísla tak, aby ich súčet bol deliteľný číslom n . [54-C-I-2]
- D1. Určte počet všetkých trojíc navzájom rôznych trojčiferných prirodzených čísel, ktorých súčet je deliteľný každým z troch sčítaných čísel. [55-C-I-3]

6. Dokážte, že pre ľubovoľné rôzne kladné čísla a, b platí

$$\frac{a+b}{2} < \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

(Jaromír Šimša)

Riešenie. Ľavú nerovnosť dokážeme ekvivalentnými úpravami:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} < \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}, & \quad | \cdot 6(a+b) \\ 3(a+b)^2 < 4(a^2+ab+b^2), \\ 0 < (a-b)^2. \end{aligned}$$

Posledná nerovnosť vzhľadom na predpoklad $a \neq b$ platí. Aj pravú nerovnosť zo zadania budeme ekvivalentne upravovať, začneme umocnením každej strany na druhú:

$$\begin{aligned} \frac{4(a^2+ab+b^2)^2}{9(a+b)^2} < \frac{a^2+b^2}{2}, & \quad | \cdot 18(a+b)^2 \\ 8(a^2+ab+b^2)^2 < 9(a^2+b^2)(a+b)^2, \\ 8(a^4+b^4+2a^3b+2ab^3+3a^2b^2) < 9(a^4+b^4+2a^3b+2ab^3+2a^2b^2), \\ 6a^2b^2 < a^4+b^4+2a^3b+2ab^3. \end{aligned}$$

Posledná nerovnosť je súčtom nerovností $2a^2b^2 < a^4+b^4$ a $4a^2b^2 < 2a^3b+2ab^3$, ktoré obe platia, lebo po presune členov z ľavých strán na pravé dostaneme po rozklade už zrejme nerovnosti $0 < (a^2-b^2)^2$, resp. $0 < 2ab(a-b)^2$.

NÁVODNÉ A DOPĽŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Pre $a, b \in \mathbb{R}$ dokážte

$$a^4+b^4 \geq a^3b+b^3a.$$

[Upravte na tvar $(a^3-b^3)(a-b) \geq 0$.]

D1. Dokážte, že pre každé tri reálne čísla x, y, z , ktoré spĺňajú nerovnosti $0 < x < y < z < 1$, platí nerovnosť

$$x^2+y^2+z^2 < xy+yz+zx+z-x.$$

[48-C-II-4]

D2. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla a, b a c platí nerovnosť

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{c}\right) \left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 8.$$

[55-B-S-1]

D3. Ak reálne čísla a, b, c, d spĺňajú rovnosti

$$a^2+b^2=b^2+c^2=c^2+d^2=1,$$

platí nerovnosť

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd \leq 3.$$

Dokážte a zistite, kedy nastane rovnosť. [55-C-II-2]