SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY
Fakulta PEDaS Žilinskej univerzity, 010 26 Žilina

53. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY
Leták kategórií A, B, C – I. kolo, domáca časť

Autori úloh: RNDr. P. Černek, CSc, Mgr. E. Kováč, Mgr. P. Leischner,
doc. RNDr. J. Šimša, CSc, RNDr. J. Švrček, CSc,
doc. RNDr. S. Trávníček, CSc, RNDr. J. Zhouf, CSc.

Vydala IUVENTA pre vnútornú potrebu Ministerstva školstva SR
Miesto a dátum vydania: Bratislava, august 2003
Náklad: 2500

Programom WORD pripravil doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc.
Grafická úprava: RNDr. Milan Stacho
Zodpovedný redaktor: doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY
Fakulta PEDaS Žilinskej univerzity, 010 26 Žilina

M A T E M A T I C K Á O L Y M P I Á D A
N A S T R E D N Ý C H Š K O L Á C H

Kategórie A, B, C

53. ročník, školský rok 2003 / 2004

I. kolo (domáca časť)

Vážení žiaci stredných škôl,

Slovenská komisia matematickej olympiády vás pozýva zúčastniť sa 53. ročníka matematickej olympiády – súťaže pre žiakov stredných škôl v našej republike.

Kategória **A** je určená žiakom maturitných a predmaturitných ročníkov.
Kategória **B** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 2 roky.
Kategória **C** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako tri roky.
Pre žiakov prvých, prípravných ročníkov bilingválnych gymnázií je určená kategória **C**.

Organizácia súťaže v kategóriách **A**, **B**, **C**:

V **domácej časti I. kola** na vás čaká **6 úloh**, ktoré nájdete v tomto letáku. Ich riešenia (nie nutne všetkých úloh) odovzdajte svojmu učiteľovi matematiky do **26. novembra 2003** (kategória **A**) a do **13. januára 2004** (kategórie **B** a **C**). Ten ich opraví, ohodnotí podľa stupnice 1 – *výborne*, 2 – *dobre*, 3 – *nevyhovuje*. Potom ich s vami rozoberie, vysvetlí vám prípadné nedostatky a oboznámi vás so správnym riešením. Ak budú vaše riešenia aspoň štyroch úloh ohodnotené ako výborné alebo dobré, budete pozvaní do **školskej časti I. kola**. Tam budete v stanovenom čase samostatne riešiť ďalšie tri úlohy. Opravené riešenia školského aj domáceho kola úspešných riešiteľov školského kola potom váš učiteľ matematiky pošle na príslušnú krajskú komisiu MO. Tá na základe výsledkov pozve najlepších účastníkov školského kola do **II. kola**, v ktorom budú v priebehu štyroch hodín samostatne riešiť štyri úlohy. V kategóriách **B** a **C** tým súťaž končí. O poradí v druhých kolách rozhoduje súčet bodov získaných za jednotlivé úlohy, pričom bodové hodnotenie každej úlohy je nezáporné celé číslo menšie ako 7. Pokiaľ prvých *n* žiakov dosiahne rovnaký počet bodov, je poradie označené zhodne prvým až *n*-tým miestom. Podobne pre poradie na ďalších miestach. Žiadne iné kritériá nie sú prípustné.

V kategórii **A** budú ešte najlepší riešitelia II. kola z celej republiky súťažiť v **III. kole**, celoštátnom, kde budú dva dni (po 4,5 hodinách) riešiť dve trojice úloh. Najviac polovica účastníkov tohto kola bude vyhlásená za úspešných riešiteľov a najviac štvrtina za víťazov 53. ročníka v kategórii **A**. Z víťazov III. kola sa vyberá družstvo Slovenskej republiky na Medzinárodnú matematickú olympiádu a na medzištátne stretnutie s Českou republikou a Poľskom.

Predbežne boli stanovené tieto termíny 53. ročníka matematickej olympiády:

	I. kolo (školská časť)	II. kolo (krajské)	III. kolo (celoštátne)
Kategória A	2. 12. 2003	13. 1. 2004	28. 3. – 31. 3. 2004
Kategórie B, C	27. 1. 2004	23. 3. 2004	—–

Matematickú olympiádu vyhlasuje *Ministerstvo školstva SR* v spolupráci s *Jednotou slovenských matematikov a fyzikov* a *Slovenskou komisiou matematickej olympiády*. Súťaž riadi *Slovenská komisia MO* a v krajoch ju riadia *krajské komisie MO* pri pobočkách JSMF. Na jednotlivých školách ju zaisťujú učitelia matematiky. Vy sa obracajte na svojho učiteľa matematiky. Celoštátne kolo MO, tlač materiálov MO a ich distribúciu po organizačnej stránke zabezpečuje IUVENTA Bratislava v tesnej súčinnosti so Slovenskou komisiou matematickej olympiády.

Riešenia súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

Emil Kruh
I.C, Gymnázium L. Eulera
Okrúhle nám. 5, 940 01 Nové Zámky
Kraj Nitra
2003/2004
C – I – 3

Posledný údaj je označenie úlohy podľa tohto letáka. Zadania úloh nemusíte opisovať. Ak sa vám riešenie nezmestí na jeden list, uveďte na ďalších listoch vľavo hore svoje meno a označenie úlohy a strany očíslujte. **Riešenie píšte ako výklad, v ktorom sú uvedené všetky podstatné úvahy tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup.**

Veľa radosti z úspešného riešenia úloh vám všetkým praje

Doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.
predseda Slovenskej komisie MO

Radi by sme upozornili učiteľov a študentov na Korešpondenčný matematický seminár (KMS) organizovaný združením Trojsten. Táto súťaž je veľmi efektívnou formou prípravy na MO a tiež zdokonaľovania sa v matematickom myslení ako takom. K tomu prispievajú aj záverečné sústredenia pre najlepších riešiteľov. Pre riešiteľov MO kategórií B a C je v KMS určená kategória ALFA. Pre lepších a skúsenejších z kategórie B a pre kategóriu A je v KMS určená kategória BETA. A nakoniec pre tých, čo majú ambície uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je v KMS určená kategória GAMMA. Viac informácií o KMS nájdete v priloženom samostatnom letáku.

Na ďalšiu spoluprácu sa teší

Martin Potočný

KATEGÓRIA C

C – I – 1

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n, ktoré je väčšie ako 3 a nie je deliteľné tromi, platí: Šachovnicu $n\times n$ je možné rozrezať na jeden štvorec 1×1 a obdĺžniky 3×1.

(*J. Zhouf*)

C – I – 2

Je daný obdĺžnik $ABCD$. Nech priamky p a q, ktoré prechádzajú vrcholom A, pretínajú polkružnice zvonku pripísané stranám BC a CD v bodoch K a L ($B\neq K\neq C\neq L\neq D$) a taktiež strany BC a CD v bodoch P a Q tak, že trojuholník ABP má taký istý obsah ako trojuholník KCP a súčasne trojuholník AQD má taký istý obsah ako trojuholník CLQ. Dokážte, že body K, L, C ležia na jednej priamke.

(*J. Švrček*)

C – I – 3

Žiak mal vypočítať príklad $X\cdot Y:Z$, kde X je dvojciferné číslo, Y trojciferné číslo a Z trojciferné číslo s číslicou 2 na mieste jednotiek. Výsledkom príkladu malo byť prirodzené číslo. Žiak ale prehliadol bodku a súčin $X\cdot Y$ chápal ako päťciferné číslo. Dostal tak sedemkrát väčší výsledok ako mal vyjsť. Aký príklad mal žiak počítať?

(*P. Černek*)

C – I – 4

Nech P je ľubovoľný vnútorný bod rovnostranného trojuholníka ABC. Uvažujme obrazy K, L a M bodu P v osových súmernostiach s osami AB, BC a CA. Určte množinu všetkých bodov P takých, že trojuholník KLM je rovnoramenný.

(*J. Zhouf*)

C – I – 5

Prirodzené číslo nazveme *magickým* práve vtedy, keď sa dá rozložiť na súčet dvoch trojmiestnych čísel zapísaných rovnakými číslicami, ale v opačnom poradí. Napríklad číslo 1413 je magické, lebo $1413 = 756 + 657$; najmenšie magické číslo je 202.

a) Určte počet všetkých magických čísel.
b) Ukážte, že súčet všetkých magických čísel je $187\,000$.

(*J. Šimša*)

C – I – 6

Zo všetkých štvoruholníkov, ktoré sa dajú vpísať do danej kružnice s polomerom r a ktoré majú dve strany danej dĺžky m, určte tie, ktoré majú najväčší obsah.

(*P. Leischner*)

53 MO

M A T E M A T I C K Á   O L Y M P I Á D A

53. ročník   Školský rok 2003 / 2004   Domáca časť I. kola

****

KATEGÓRIA A

A – I –1

Určte všetky dvojice (p,q) reálnych čísel také, že rovnica $x^2+px+q=0$ má riešenie v obore reálnych čísel, pričom platí: Ak t je koreňom tejto rovnice, potom aj $|2t-15|$ je jej koreňom.

(*P. Černek*)

A – I – 2

V rovine daného štvorca $KLMN$ určte množinu všetkých bodov P, pre ktoré sú uhly NPK, KPL a LPM zhodné.

(*J. Švrček*)

A – I – 3

Pre ľubovoľné prirodzené číslo k zostavme z písmen A, B všetky možné „slová“ dĺžky k. Rozdeľme ich do dvoch skupín P_k a N_k podľa toho, či je v danom slove párny alebo nepárny počet „slabík“ BA (za párny považujeme aj počet 0). Napríklad slová $\underline{BA}BBB\underline{BA}$ a $AAAAAAB$ patria do skupiny P_7, slová $AAB\underline{BA}BB$ a $\underline{BABA}A\underline{BA}$ patria do skupiny N_7. Zistite, pre ktoré k majú skupiny P_k a N_k rovnaký počet prvkov.

(*J. Šimša*)

A – I – 4

Určte najmenšie reálne číslo p také, že nerovnosť

$$\sqrt{1^2+1}+\sqrt{2^2+1}+\sqrt{3^2+1}+\ldots+\sqrt{n^2+1}\le\frac{n(n+p)}{2}$$

platí pre každé prirodzené číslo n.

(*S. Trávníček*)

A – I – 5

Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník, ktorého vnútorný uhol pri vrchole D má veľkosť 60^0.

a) Ak $|BC|=|CD|$, potom platí $|CD|+|DA|=|AB|$; dokážte.

b) Rozhodnite, či platí opačná implikácia.

(*E. Kováč*)

A – I – 6

V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc $\quad x^2=\frac{1}{y}+\frac{1}{z},\qquad y^2=\frac{1}{z}+\frac{1}{x},\qquad z^2=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$

(*J. Šimša*)

KATEGÓRIA B

B – I – 1

Každú z hviezdičiek na mieste jednotiek vo výraze

$$\left|\frac{777\,777\,777\,77*}{777\,777\,777\,77*}-\frac{555\,555\,555\,554}{555\,555\,555\,559}\right|$$

nahraďte nejakou číslicou tak, aby výraz mal čo najmenšiu hodnotu.

(*J. Šimša*)

B – I – 2

V rovnoramennom lichobežníku $ABCD$ platí $|BC|=|CD|=|DA|$ a $|\angle DAB|=|\angle ABC|=36°$. Na základni AB je daný bod K tak, že $|AK|=|AD|$. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom AKD a KBC majú vonkajší dotyk.

(*J. Zhouf*)

B – I – 3

V obore reálnych čísel riešte rovnicu $x\lfloor x\rfloor-5x+7=0$, kde $\lfloor x\rfloor$ znamená dolnú celú časť čísla x, teda najväčšie celé číslo k, pre ktoré platí $k\le x$. (Napríklad $\lfloor -3{,}1\rfloor=-4$.)

(*E. Kováč*)

B – I – 4

Číslo a_n vznikne tak, že za seba napíšeme prvých n po sebe idúcich prirodzených čísel, napríklad $a_{13}=12345678910111213$. Zistite, koľko čísel deliteľných 24 sa nachádza medzi číslami $a_1, a_2, \mathbf{L}, a_{10\,000}$.

(*P. Černek*)

B – I – 5

Je daná priamka p a bod A, ktorý na nej neleží. Zostrojte lichobežník $ABCD$ s minimálnym obsahom a ramenom BC na priamke p tak, aby boli splnené rovnosti $|BC|=|AC|$ a $|BE|=3\cdot|DE|$, kde E je priesečník uhlopriečok lichobežníka.

(*P. Leischner*)

B – I – 6

Určte všetky prirodzené čísla M deliteľné 240, pre ktoré má rovnica $M=\mathrm{NSN}\,(x,y)$ s neznámymi x, y práve 1001 riešení v obore prirodzených čísel. (Symbol $\mathrm{NSN}\,(x,y)$ značí najmenší spoločný násobok čísel x a y.)

(*P. Černek*)